$$\lim_{x\to 0} \boxed{\frac{\sin x^2}{x^2}} \underset{t=x^2}{=} \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

Limite di funzioni composte convergenti

$$x \to t = x^2 = f(x)$$

$$t \to \frac{\sin t}{t} = g(t)$$

$$x \to g(f(x)) = \frac{\sin x^2}{x^2}$$

$$f : \Omega \to \Sigma \qquad g : \Sigma \to \mathbb{R}$$

$h(x) = g(f(x))$ è definita su $\Omega$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \ , \quad \lim_{t\to L} g(t) = M$$

Ts.

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) \overset{?}{=} M$$

**FALSO!!!**

$$f(x) \equiv 1 \quad \forall x, \quad L = \lim_{x\to 0} f(x) = 1$$

$$g(f(x)) \equiv g(1) = 2$$

$$g(t) = \begin{cases} 2 & t = 1 \\ 3 & t \neq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{t\to 1} g(t) = 3 \neq 2 = \lim_{x\to 0} g(f(x))$$

Casi in cui il cambio di variabili è lecito!

I) $g$ è continua in $L \Rightarrow \lim_{t \to L} g(t) = g(L)$

$|g(f(x)) - g(L)| < \varepsilon$ $\quad$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists \sigma > 0 : \forall t \in \Sigma, |t - L| < \sigma$

$M$

$|g(t) - g(L)| < \varepsilon$

$f(x)$ ?

Sì se $\boxed{f(x) \in \Sigma}$

$|f(x) - L| < \sigma$

$\forall \sigma\ \exists \delta :$ vera per la converg. a $L$ di $f$ in $x_0$

purché $x \neq x_0$ $|x - x_0| < \delta$

NON si può usare per $\lim_{0} \frac{\sin x^2}{x^2}$ perché

$$g(t) = \frac{\sin t}{t}$$

non è continua in $0 = L$

II) $g$ NON è definita in $L$

$$\lim_{t \to L} g(t) = M$$

$$|g(f(x)) - M| < \varepsilon$$

$\forall \varepsilon\ \exists \sigma > 0 :$ $\boxed{\forall t \in \Sigma\ |t - L| < \sigma,\ t \neq L}$

$$|g(t) - M| < \varepsilon$$

al posto di $t$ si può mettere $f(x)$

e otteniamo la tesi se

1) $f(x) \in \Sigma$

2) $f(x) \neq L$

3) $|f(x) - L| < \sigma$

se $f(x) = L$ $g(f(x))$ non esiste

scelto $\sigma$ $\exists \delta > 0 : \forall x \in \Omega,\ x \neq x_0,\ |x - x_0| < \delta$

Il cambio di variabile è dunque valido se:

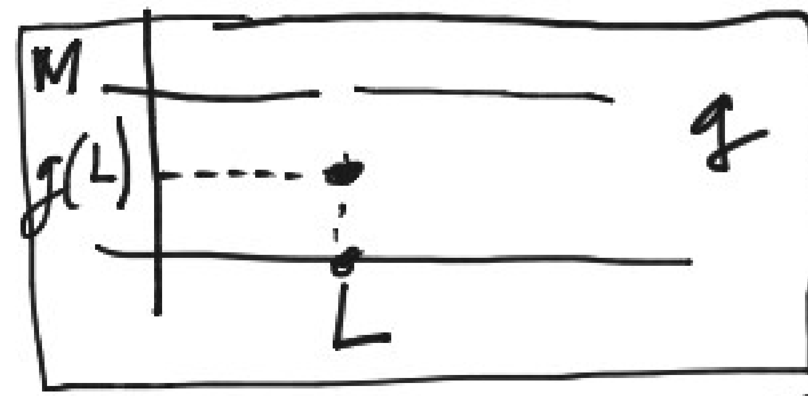
— $g$ è continua in $L$

<u>oppure</u>

— se $g$ non è definita in $L$

Resta da considerare il caso in cui $g$ è definita <u>in</u> $L$, ma è discontinua

$$g(L) \neq M$$




III) Esiste un intorno $B(x_0, \rho)$ di $x_0$ tale che

$$\boxed{f(x) \neq L} \quad \forall x \in B(x_0, \rho) \setminus \{x_0\}$$

Stessa prova precedente ma $f(x) \neq L$ è gratis se $\delta < \rho$

Il valore "proibito" $L$ è permesso alla $f$ solo in $x_0$ (almeno in un intorno $B(x_0, \rho)$)


risolvere $f(x) = L$ è (normalmente) una TRAGEDIA

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{x^2} = 1$$

$f(x) = x^2$ $\quad f \to 0 = L$ in $0 = x_0$

$g(t) = \frac{\sin t}{t}$ $\quad g \to 1$ in $0 = L$

$g$ non è definita in $0$

2° caso

$$\lim_{0} \sin(x^2) = 0$$

$f(x) = x^2$

$g(t) = \sin t$

$g$ è continua in $0$

dom $= \{(x,y) \neq (0,0)\}$

$\partial B(0,1) \subseteq \mathrm{dom} f$

è chiusa e limitata

$$\lim_{(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+2y^2}} = 0$$

$$\frac{\sin(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+2y^2}} = \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \cdot \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+2y^2}}$$

2-omog

1-omog

2° caso

$t = x^2+y^2$ $\quad t \to 0$

$1$ $\qquad 0$

$\sin t / t$ NON è def in $0$

1-omog

$x^2+2y^2 \neq 0$ se $(x,y) \neq (0,0)$