$h(t) = f(\gamma(t))$

- $h(0) = f(\gamma(0)) = f(x_1)$ $\quad h(1) = f(x_2)$ e, per ipotesi

$$\boxed{f(x_1)\, f(x_2) < 0}$$

- h è $\boxed{\text{continua}}$ su $[0,1]$, $\boxed{\text{intervallo}}$,

3 ipotesi del th. degli zeri
di Weierstrass.

$$1 > |f(y_n)| = |y_n|^\alpha |f(x_n)| > \left(\frac{\delta}{2}\right)^\alpha n \qquad \forall n$$

è assurdo non appena si sceglie

$$n > \left(\frac{2}{\delta}\right)^\alpha \Rightarrow \left(\frac{\delta}{2}\right)^\alpha n > 1$$

$\lim_{x_0} f(x) = 0$ per assurdo $|f|$ non limitata in $\mathrm{dom} f \cap \partial B(0,1)$

$\exists x_n \in \partial B(0,1) \cap \mathrm{dom} f \quad |f(x_n)| > n \qquad \{x_n\}$

vale Cauchy

$\bar{\varepsilon} = 1 \ \exists \delta : x \in \mathrm{dom} f, \ x \neq x_0 = 0, \ |x - x_0| < \delta \qquad |f(x) - 0| < 1$

$\rightarrow 1 > |f(x)| = \left| f\left(|x| \frac{x}{|x|}\right)\right| = |x|^\alpha \left| f\left(\frac{x}{|x|}\right)\right| \qquad \forall x \ \boxed{|x| < \delta} \ x \neq x_0$

$\boxed{y_n = \frac{\delta}{2} x_n} \qquad |y_n| = \frac{\delta}{2}$ perché $|x_n| = 1$

$\longrightarrow 1 > |f(y_n)| = |y_n|^\alpha |f(x_n)|$

f α-omog. $\alpha>0$ $\quad |f|$ è limitata su $\operatorname{dom} f \cap \underbrace{\partial B(0,1)}_{\{|x|=1\}}$

TS. $\lim_{0} f(x) = 0$

DIM. $\quad x \neq 0 \quad f(x) = f\Big(\underset{>0}{|x|}\frac{x}{|x|}\Big) \overset{\text{omog.}}{=} |x|^\alpha f\Big(\frac{x}{|x|}\Big)$ $\quad \frac{x}{|x|} \in \partial B(0,1)$

$t = |x|$ omog

$0 \le |f(x)| = |x|^\alpha \left|f\Big(\frac{x}{|x|}\Big)\right| \le k|x|^\alpha$ $\quad$ ove $\quad k \ge |f(x)|$ $\quad x \in \operatorname{dom} f \cap \partial B(0,1)$

confronto

$\to 0$

Vera $\forall x \in \operatorname{dom} f$ $\forall t > 0$

$f(ty) = t^\alpha f(y)$ $\qquad t = |x|$, $\quad y = \frac{1}{|x|} x$

f infinit. $\iff$ f limitata su $\operatorname{dom} f \cap \partial B(0,1)$

CN $\Longrightarrow$

CS $\Longleftarrow$

CAUCHY (pron. Coscì)

CNS perché f sia convergente in x_0 è che

$$\boxed{\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 : \forall x, y \in \operatorname{dom} f,\ x, y \neq x_0,\ |x-x_0|<\delta\ |y-x_0|<\delta \quad |f(x)-f(y)|<\varepsilon}$$

f non converge se la condizione è falsa, cioè

$$\exists\, \bar\varepsilon>0\ \forall \delta>0\ \exists\, \bar x, \bar y \in \operatorname{dom} : \bar x, \bar y \neq x_0\ |\bar x-x_0|<\delta\ |\bar y-x_0|<\delta$$

$$|f(\bar x)-f(\bar y)| \geq \bar\varepsilon$$

$$|t| < \min\left\{\frac{\delta}{|x_1|}, \frac{\delta}{|x_2|}\right\}$$

$f(x_1) \neq f(x_2)$ e $f(tx_1) = f(x_1)$ $f(tx_2) = f(x_2)$

$\boxed{|tx_1|<\delta \quad |tx_1|<\delta \text{ per } t \text{ abbast. piccolo}}$ $\bar\varepsilon < |f(x_1) - f(x_2)|$