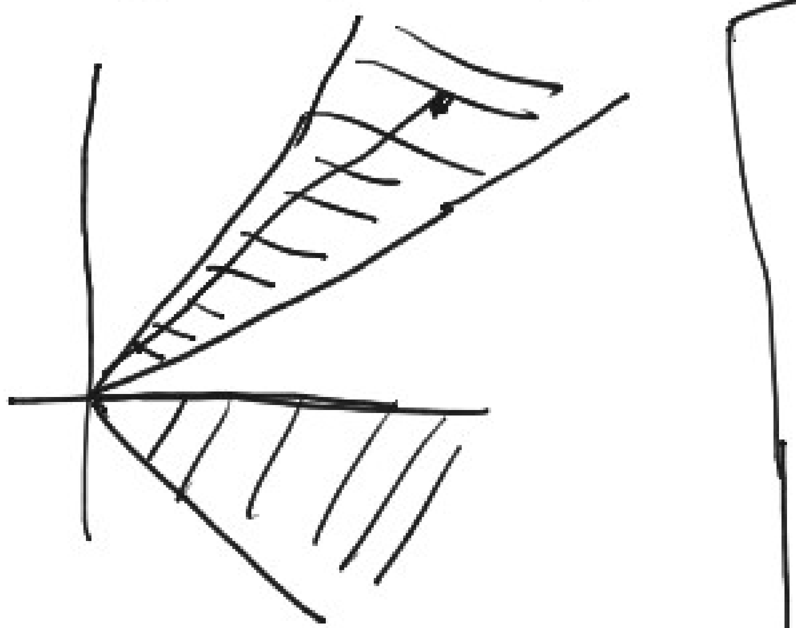
FUNZIONI OMOGENEE

$f(x)$ $\qquad f:\Omega \to \mathbb{R}$ $\qquad \Omega$ cono

cono $\Leftrightarrow$ $x \in$ cono anche $tx \in$ cono $\forall t > 0$.



f si dice α-omogenea se

$$f(tx) = t^\alpha f(x) \quad \forall x \in \Omega \ \forall t > 0$$

Ω cono

$x \to tx$

$y \to ty$

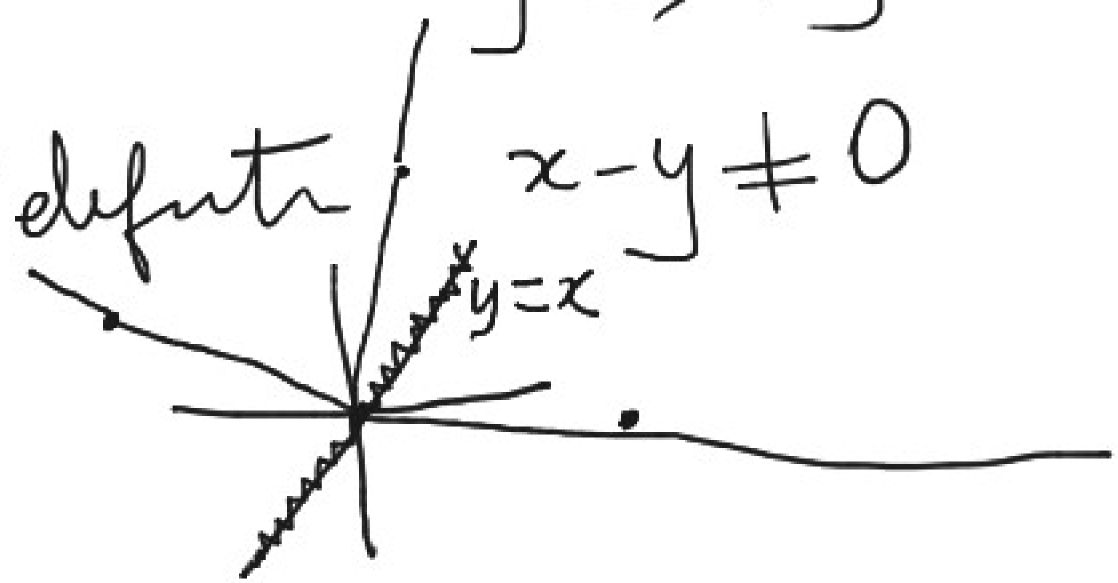
$\frac{x^2+y^2}{x-y}$ 1-omogenea

$$\frac{t^2(x^2+y^2)}{t(x-y)} = t\,\frac{x^2+y^2}{x-y}$$

$f(tx, ty)$ $\qquad t^1 f(x,y)$

$\boxed{y \neq x}$

f è definita: $x - y \neq 0$



$$\frac{x^2+y^2}{x^3-y^3} = f(x,y)$$

$$f(tx,ty) = \frac{t^2(x^2+y^2)}{t^3(x^3-y^3)} = t^{-1} f(x,y)$$

$t \neq 0$

(-1)- omogenee

$p(x)$ polinomio omogeneo di grado α allora è α-omogeneo.

$p : \mathbb{R}^n$ (cono) $\quad x \to tx$ in ogni monomio si ottiene un fattore t^α che può essere posto in evidenza

$x^2 + xy - \underline{xz} + y^2 + 3z^2$ è un polinomio omogeneo di grado 2

LEMMA

Se f è α-omogenea su Ω e g è β-omogenea su Ω

$\Rightarrow$ fg è $(\alpha+\beta)$omogenea e f/g è $(\alpha-\beta)$ omogenea

$$(fg)(tx) = \underset{\alpha\text{-omog.}}{f(tx)}\,\underset{\beta\text{-omog.}}{g(tx)} = t^{\alpha} f(x)\, t^{\beta} g(x) =$$

$$= t^{\alpha+\beta} f(x) g(x)$$

$f(x)$ α-omog. $\quad [f(x)]^{\beta}$ è $(\alpha\beta)$-omogenea

$$[f(tx)]^{\beta} = [t^{\alpha} f(x)]^{\beta} = t^{\alpha\beta}[f(x)]^{\beta}$$

f^{β} è $\alpha\beta$-omog.

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} = (\underbrace{x^2+y^2})^{1/2}$$

è 1-omogenea

$\alpha = 2$

$\beta = 1/2$

$1 = 2 \cdot \frac{1}{2}$

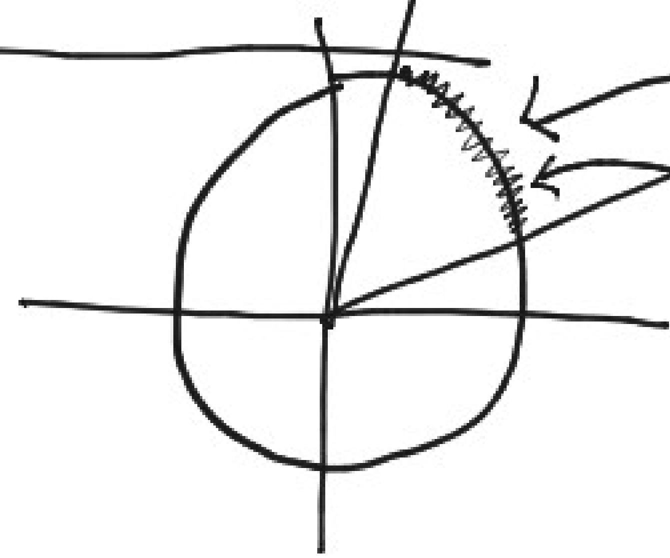
$f:\Omega\to\mathbb{R}$ α-omog. $\alpha>0$

0 è di accum per Ω perché $tx\in\Omega$ se $x\in\Omega$ e $t>0$

Allora $|tx|=|t||x|<\varepsilon$ $|t|<\varepsilon/|x|$

$\lim_{x\to 0} f(x)=0$ se e solo se f è limitata su $\Omega\cap\partial B(0,1)$

Ω



Punti di Ω sulla circonferenza unitaria

frontiera

$\partial\Omega$ è la front. di Ω

$x_0=0$

La tesi è:

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ \forall x\in\mathrm{dom}f\ |x|<\delta\Rightarrow |f(x)|<\varepsilon$

$\boxed{x\neq 0}$ $\boxed{x=|x|\frac{x}{|x|}}$

$f(x)=f\Big(\underbrace{|x|}_{x}\frac{x}{|x|}\Big)=|x|^\alpha f\left(\frac{x}{|x|}\right)\Rightarrow |f(x)|=|x|^\alpha\left|f\left(\frac{x}{|x|}\right)\right|$

$\boxed{t=|x|>0}$

f è limitata su $\underbrace{\Omega \cap \partial B(0,1)}$

$$\boxed{\exists\, k : \underbrace{|f(x)| \leq k}} \quad \forall x \in \Omega \cap \underbrace{\partial B(0,1)}$$

$$x \to \frac{x}{|x|}$$

$$0 \leq |f(x)| \leq k|x|^{\alpha} \qquad \boxed{\alpha > 0}$$

th. confronto, poiché $|x|^{\alpha} \to 0$ $\quad x|x| \to 0$

0

$$k|x|^{\alpha} < \varepsilon \text{ vera}$$

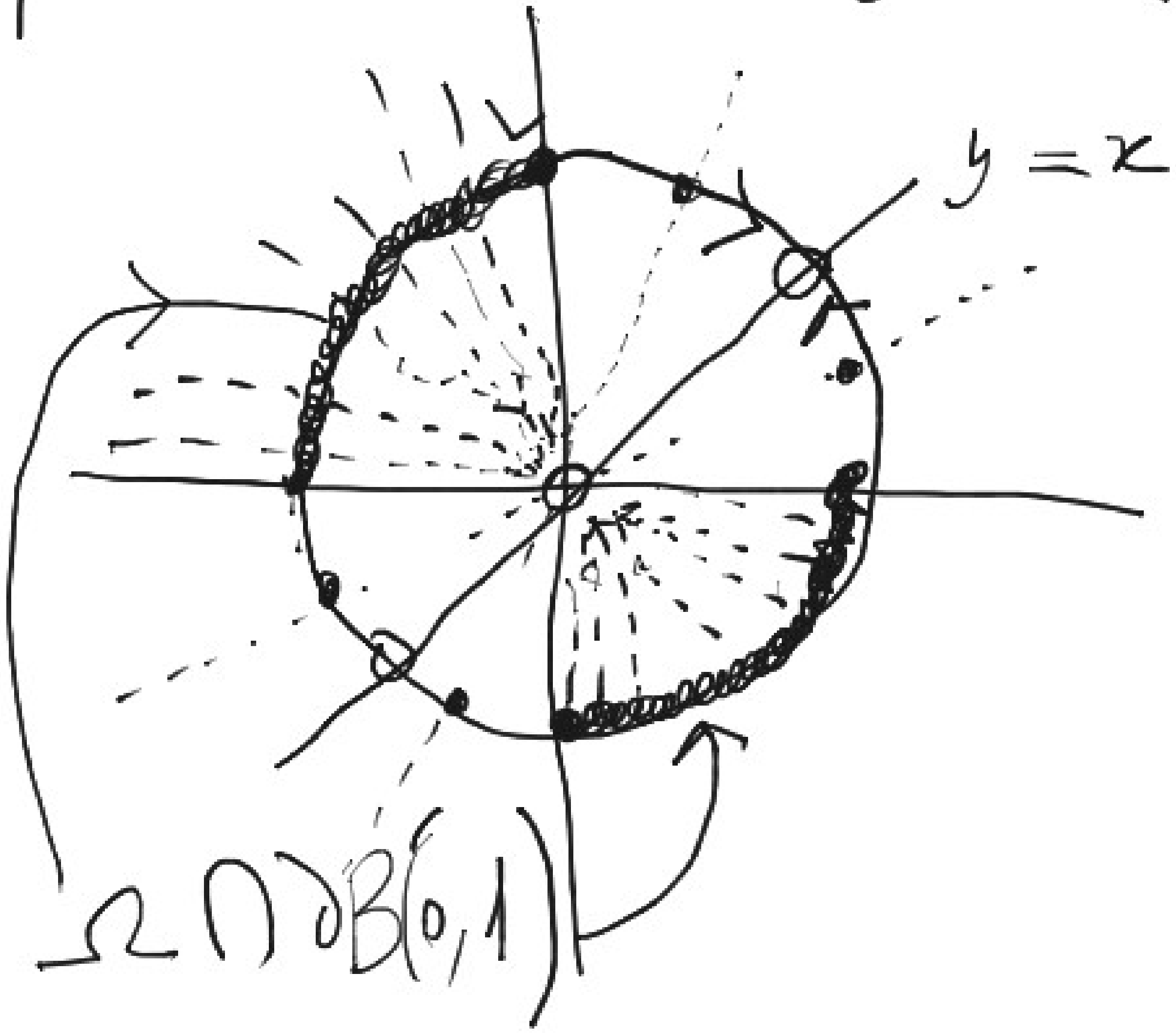
$$|x| < \left(\frac{\varepsilon}{k}\right)^{1/\alpha} = \delta$$

Consideriamo l'esempio $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x-y}$, definita sul dominio $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\}$, ed ivi continua perché rapporto di funzioni continue, col denominatore mai nullo nel dominio Ω.

Consideriamo $\Omega \cap \partial B(0,1)$ e osserviamo che il numeratore di f vale costantemente 1 su $\Omega \cap \partial B(0,1)$, mentre il denominatore tende a 0 quando $(x,y) \to \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ oppure $(x,y) \to \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Ne segue che il rapporto ha modulo che tende a $+\infty$, e con segni differenti: positivo sotto la bisettrice $y=x$ e negativo sopra. Dunque il $\lim_{0}$ non esiste, perché in qualunque sfera $B(0,\delta)$ la funzione non è limitata nell'intorno di $\left(\frac{\delta}{2\sqrt{2}}, \frac{\delta}{2\sqrt{2}}\right)$

Se però si sceglie $\Omega = \{xy < 0\}$ (II e IV quadrante)



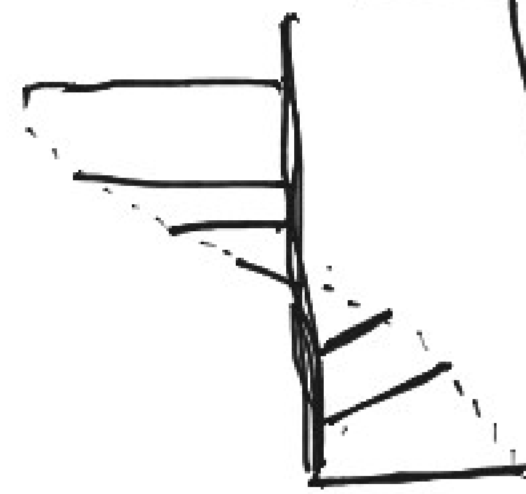
$$\frac{x^2+y^2}{x-y} = f(x,y)$$

Visto che f è 1-omogenea, ne segue

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\Omega}} f(x,y) = 0$$

Sì, perché $H = \Omega \cap \partial B(0,1)$ è chiuso e limitato, e quindi f, che è continua su H, compatto, è limitata su di esso.

$\boxed{f \text{ sia } 0\text{-omogenea}}$, Allora f converge in 0 se e solo se è costante.



f 0 omogenea e non costante allora <u>oscilla</u>

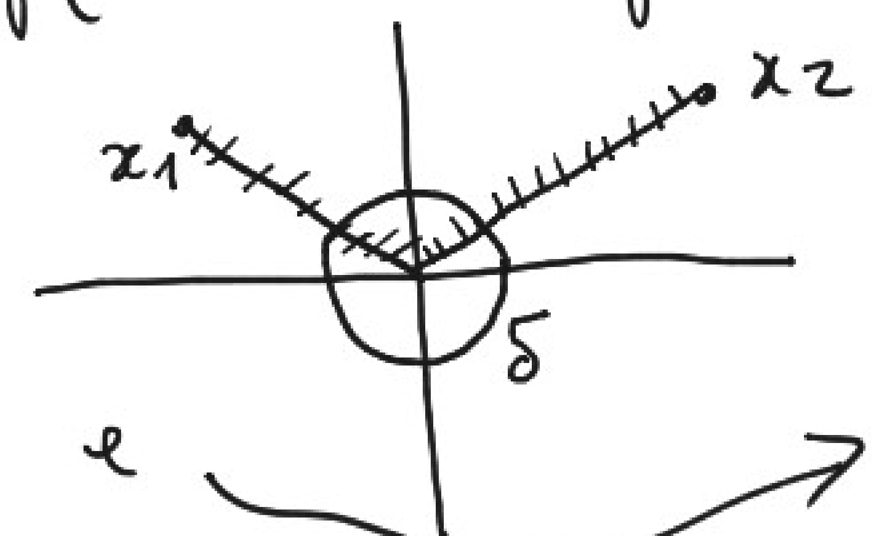
<u>DIM</u>. $\boxed{f(tx) = f(x)}$

$\Rightarrow$ è costante sui raggi uscenti dall'origine

si ha che $\underline{f(x_1)} \neq \underline{f(x_2)}$, perché f è non costante

$\Rightarrow$ $f(tx_1) = f(x_1)$ $\quad$ $f(tx_2) = f(x_2)$

In ogni sfera $B(0,\delta)$ esistono punti sui quali f vale $\underline{f(x_1)}$ $(tx_1, t>0)$ e



dom f

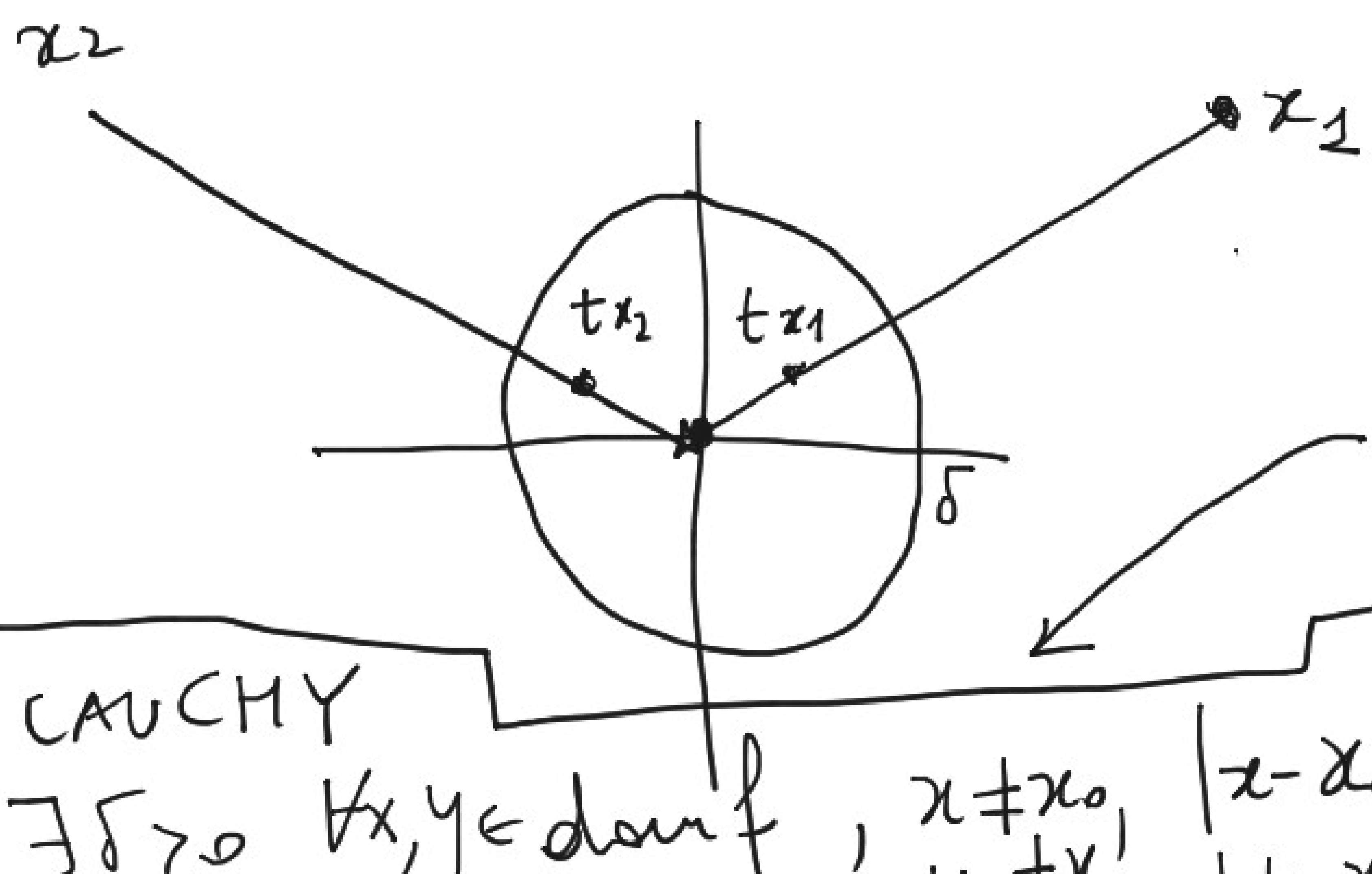
altri sui quali f vale $\underline{f(x_2)}$

Scelto $\bar{\varepsilon} < |f(x_1) - f(x_2)|$ e fissato ad arbitrio $\delta > 0$ si avrà che $|t x_1| < \delta$ e $|t x_2| < \delta$ se si sceglie

$$|t| < \min\left\{\frac{\delta}{|x_1|}, \frac{\delta}{|x_2|}\right\}$$

Ma, dalla 0-omogeneità, si ha $|f(tx_1) - f(tx_2)| =$
$= |f(x_1) - f(x_2)| \geq \bar{\varepsilon}$

e dunque la condizione di Cauchy è falsa



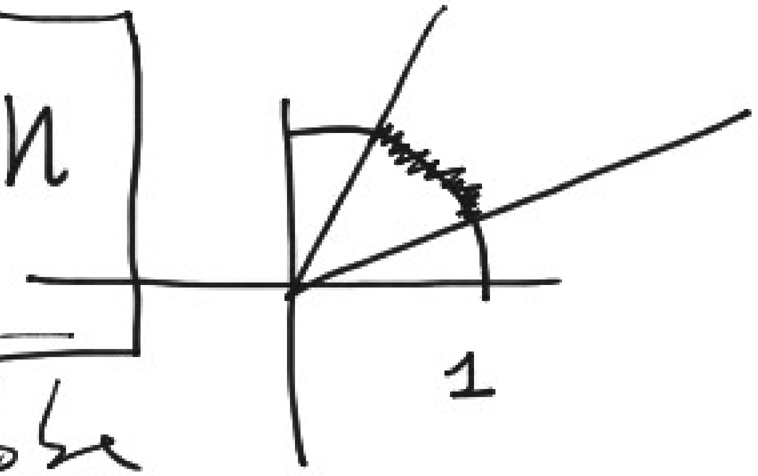
CONDIZ CAUCHY

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x, y \in \mathrm{dom} f$, $x \neq x_0$, $y \neq x_0$, $|x - x_0| < \delta$, $|y - x_0| < \delta$ $\quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

CN Se f, funzioni α-omog., $\alpha > 0$, non è limitata sulla parte del dominio sulla sfera unitaria, allora oscilla.

DIM. f sia non limitata su $\Omega \cap \partial B(0,1)$

$$\iff \boxed{\exists\ x_n \in \Omega \cap \partial B(0,1) \ : \ |f(x_n)| > n}$$



Se f fosse infinitesima in 0, si avrebbe

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in \Omega, |x| < \delta\ x \neq 0,\ |f(x)| < \varepsilon.$$

Ma si ha

$$\varepsilon > |f(x)| = \left|f\left(|x| \frac{x}{|x|}\right)\right| = \left||x|^\alpha f\left(\frac{x}{|x|}\right)\right| = |x|^\alpha \left|f\left(\frac{x}{|x|}\right)\right|$$

scelto $\bar{\varepsilon} = 1$

$$\exists\ \bar{\delta} : \forall x \in \Omega, |x| < \bar{\delta}\ x \neq 0$$

$$1 > |x|^\alpha \left|f\left(\frac{x}{|x|}\right)\right|$$

Posto $y_n = \frac{\bar{\delta}}{2} x_n$ $\quad y_n \in B(0, \bar{\delta})$ $\quad |y_n| = \frac{\bar{\delta}}{2} |x_n| = \bar{\delta}/2$

ciò produce un assurdo perché, essendo $y_n \in B(0, \overline{\delta})$ dovrebbe essere $|f(y_n)| < 1$, ma

$$1 > |f(y_n)| = \left(\frac{\overline{\delta}}{2}\right)^\alpha |f(x_n)| > n\left(\frac{\overline{\delta}}{2}\right)^\alpha$$

è falsa non appena si sceglie $n > \left(\frac{2}{\overline{\delta}}\right)^\alpha$.

CAMBIO DI VARIABILE NEI LIMITI

(LIMITE DI FUNZIONI COMPOSITE DI FUNZIONI CONVERGENTI)

$f : \Omega \to \Sigma \; , \; g : \Sigma \to ⓗ$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \qquad \lim_{y \to L} g(y) = M$

Ts (FALSA)

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = M$$

CONTROESEMPIO

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) \underset{y = f(x)}{\overset{?}{=}} \lim_{y \to L} g(y)$$

se si sa che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

Basta considerare

$$f(x) \equiv 1 \quad \text{e} \quad g(y) = \begin{cases} 2 & y \neq 1 \\ 3 & y = 1 \end{cases}$$

e notare che

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{y \to 1} g(y) = 2$$

mentre

$$\lim_{x \to 0} g(f(x)) = 3 \neq 2$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ L = 1 \\ M = 2 \end{array}}$$