LEMMA Se $p: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ polinomio non costante, e $p(z_0) \neq 0$ allora $\exists\, \bar{z} \in \mathbb{C}$ tale che

$$|p(\bar{z})| < |p(z_0)|$$

<u>DIM</u>. $p(z_0) \neq 0$ $\qquad \underline{q(w)} = \dfrac{p(z_0+w)}{p(z_0)}$

$p(z) = \sum_0^n a_i z^i \qquad p(\underbrace{z_0+w}_{z}) = \sum_0^n a_i (z_0+w)^i =$ polinomio di grado n in w

grado di q = grado di p

- q è non costante
- $q(0) = 1 \qquad q(w) = \underbrace{1 + a_k w^k} + w^{k+1} \tilde{q}(w)$

k è il minimo intero > 0 per cui $\longrightarrow a_k \neq 0$

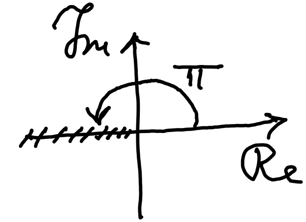
La tesi equivale a $\exists \bar{w}: |q(\bar{w})| < 1$ $\qquad \dfrac{|p(z_0+w)|}{|p(z_0)|} < 1$

$z_0 + \bar{w} = \bar{z}$

dis. triangolare

$$|q(\bar{w})| \leq |1 + a_k \bar{w}^k| + |w|^{k+1} |\tilde{q}(w)|$$

$a_k \bar{w}^k$ sarà scelto reale e negativo
il termine finale può essere reso piccolo



$a_k w^k$ sia reale e negativo, e piccolo abbast.

$a_k w^k$ sarà reale e negativo se $\arg(a_k w^k) = \pi$

$\arg a_k + k \arg w = \pi$

incognite

$k \neq 0$

$$\boxed{\arg w = \frac{\pi - \arg a_k}{k}}$$

$\boxed{|a_k w^k| < 1}$ $\boxed{|w| < \frac{1}{|a_k|^{1/k}}}$

$$|1 + \underset{\in\mathbb{R}}{a_k} \underset{\in\mathbb{R}}{w^k}| = 1 - |a_k||w|^k$$

$$|q(w)| \le 1 - |a_k||w|^k + |w|^{k+1}|\tilde{q}(w)| =$$

$$= 1 - \underbrace{|w|^k \underbrace{\left[|a_k| - |w||\tilde{q}(w)|\right]}_{w \to 0 \;\to\; |a_k|}}_{>0} < 1$$

$\boxed{\text{se } |w| < \delta}$ <0 ?

[ ] funzione continua che vale $|a_k| > 0$ in 0.

conserva lo stesso segno in un opportuno intorno $|w| < \delta$

$\bar{z} = z_0 + \bar{w}$ $\quad |\bar{w}| < \min\{\delta, |a_k|^{-\frac{1}{k}}\}$

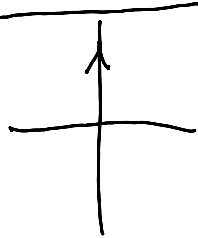
Limiti di polinomi all'∞.

Esempio

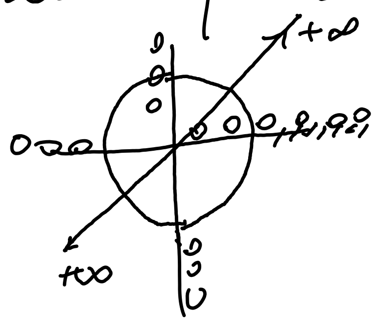
$p(x,y) = x$ $\qquad \lim_{\infty} x \overset{?}{=} \infty$ $\qquad \boxed{NO}$

$$\boxed{\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 : \underline{|(x,y)|} > \delta \quad |x| > \varepsilon}$$

sì $\qquad$ NO



sull'asse y $\quad x=0$ e y può essere preso grande quanto si vuole $\Rightarrow |(x,y)| = \underline{\underline{|y|}}$



$p(x,y) = xy$

p si annulla sugli assi

$|xy| > \varepsilon$