Teorema fondamentale della Algebra

(Inizio)

$p: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ "Ogni polinomio a coeff. in $\mathbb{C}$ non costante ha zeri in $\mathbb{C}$"

Sia p un polinomio in $\mathbb{C}$ non costante. Allora $\lim_{\infty} p(z) = \infty$

Dim. $p(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i =$

$z \neq 0$

$= z^n \cdot \sum_0^n a_i z^{i-n} =$

$= z^n \left[a_n + \sum_0^{n-1} a_i z^{i-n} \right]$

$$\boxed{|p(z)| = |z|^n \underbrace{\left| a_n + \sum_0^{n-1} a_i z^{i-n} \right|}_{\downarrow\, |a_n| > 0}}$$

$\boxed{i-n<0}$

$\boxed{n \geq 1 \text{ perché } p \text{ non è costante}}$

$\lim_{\infty} z^{i-n} \overset{?}{=} 0$ $\quad i-n<0$, $i-n \in \mathbb{Z}$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \quad |z| > \delta \Rightarrow |z^{i-n}| \cancel{>} < \varepsilon$

$k = n-i$

$|z^{-k}| = \dfrac{1}{|z|^k} < \varepsilon \Leftrightarrow |z|^k > \dfrac{1}{\varepsilon}$

$|z| > \sqrt[k]{1/\varepsilon} \equiv \boxed{\delta}$

Es.

$x^3 - 3x^2 + x - 1 =$

$= x^3 \left(1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^3} \right)$

$\underbrace{- \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^3}}_{\to 0}$

$|a_n| > 0$ $\quad \varepsilon = \dfrac{|a_n|}{2} \wedge$ $\boxed{|a_n| + \varepsilon > \left| a_n + \sum_0^{n-1} a_i z^{i-n} \right| > |a_n| - \varepsilon = \dfrac{|a_n|}{2}}$

$\exists \delta > 0$

$\lim_{\infty} \left| a_n + \sum \ldots \right| = L = |a_n|$ $\quad \boxed{|z| > \delta}$

$$\boxed{\left| a_n + \sum_0^{n-1} a_i z^{i-n} \right| > \frac{|a_n|}{2}} \text{ se } |z| > \delta$$

$$\underline{|p(z)| = \left| z \right|^n \left| \ldots \right| > \frac{|a_n|}{2} \underbrace{|z|^n}_{\to +\infty}} \Rightarrow \lim_{\infty} |p(z)| = +\infty$$

$\mathbb{R}$ $\quad \dfrac{|a_n|}{2} > 0$

Teor. confronto

$\boxed{\begin{array}{l} \lim_{?} f(x) = \underline{\infty} \\ \text{se } \lim_{?} \underline{|f(x)|} = \underline{+\infty} \end{array}}$

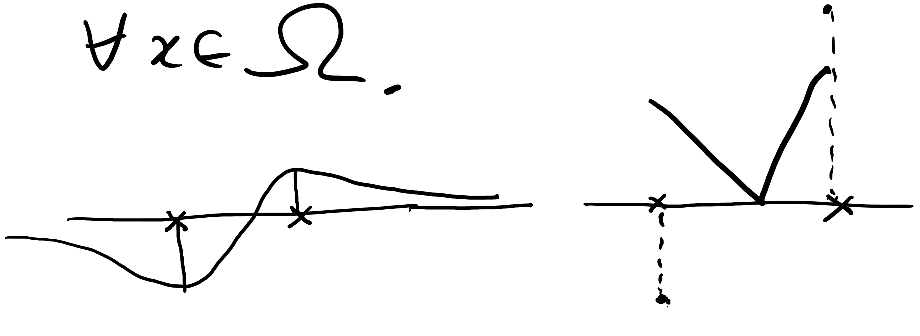
x_0 è di massimo per $f: \Omega \to \mathbb{R}$ se $f(x) \le f(x_0)$ $\forall x \in \Omega$
(globale)

Th. di Weierstrass del massimo e del minimo: "Se $f: \Omega \to \mathbb{R}$, Ω è compatto (cioè chiuso e limitato), f continua in Ω (in ogni punto di Ω), ALLORA

$\exists\, x_1, x_2 \in \Omega$: $f(x_1) \le f(x) \le f(x_2)$ $\forall x \in \Omega$.

x_1 è punto di minimo

x_2 è " " massimo

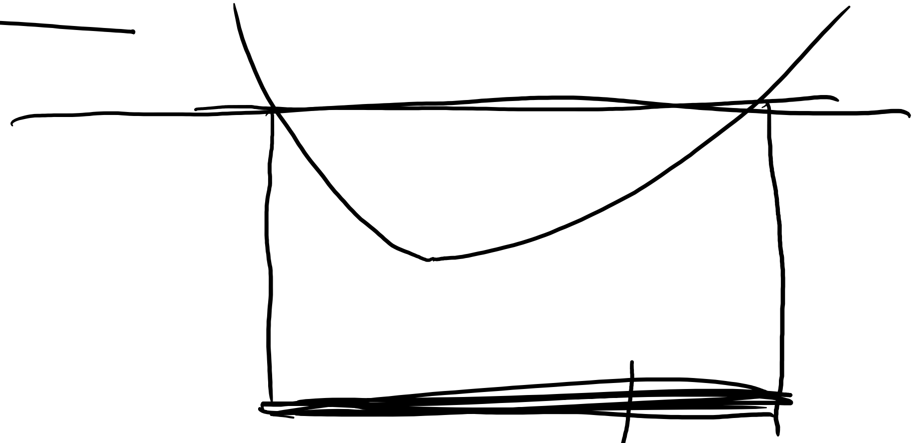


Se $|p(z)|$ ha minimo e il valore minimo è 0, allora $p(z)$ si annulla nel punto di minimo $|p(z_0)| = 0 \Rightarrow p(z_0) = 0$

Gli zeri di p sono punti di minimo di $|p|$

Th. Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, continua in $\mathbb{C}$, $\lim_{\infty} f(z) = +\infty$.

Ts f ha minimo in $\mathbb{C}$

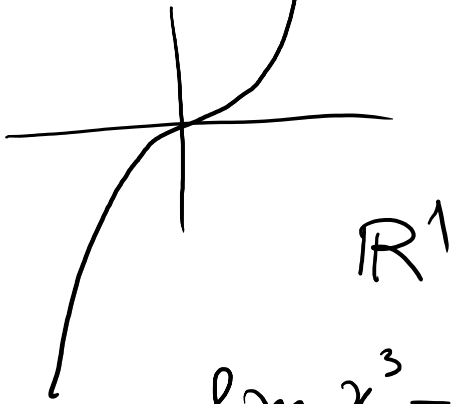


Dim

Si sceglie ad arbitrio $z_0 \in \mathbb{C}$

Se $f(z_0) > 0$ allora si pone $\boxed{\varepsilon = f(z_0)}$ X

Se $f(z_0) \leq 0$ allora si pone $\varepsilon = 1$ X



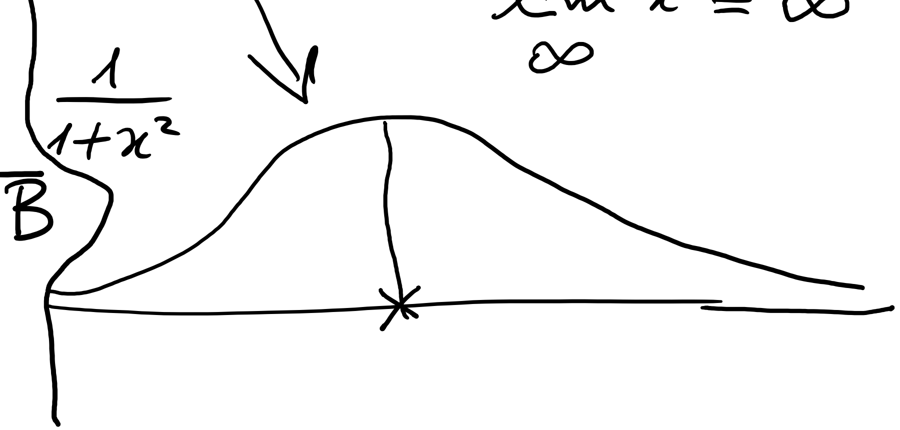
$\mathbb{R}^1$

$\lim_{\infty} x^3 = \infty$

Dalla divergente $\boxed{\exists \delta > 0 : |z| > \delta \quad f(z) > \varepsilon}$

è il complem. $\to \overline{B}(0, \delta) = \{z : |z| \leq \delta\} = \overline{B}$

è chiusa e limitata $\to$ COMPATTA $\qquad z_0 \in \overline{B}$

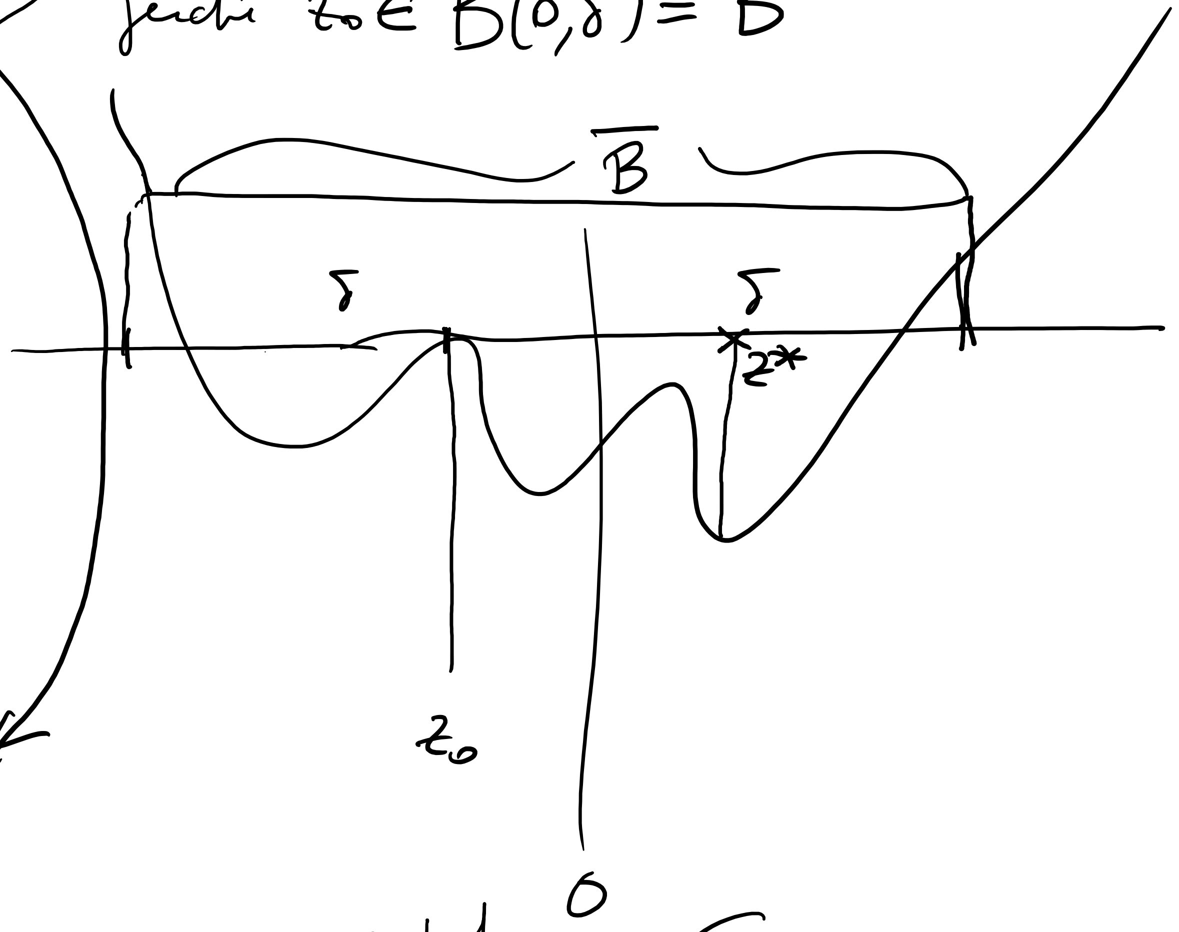


$\frac{1}{1+x^2}$

f su $\overline{B}$ ha minimo e massimo per Weierstrass. Sia z^* il punto di minimo

$f(z) \geq f(z^*)$ $\forall z \in \overline{B(0,\delta)}$ in particolare $f(z_0) \geq f(z^*)$

perché $z_0 \in \overline{B(0,\delta)} = \overline{B}$



$\forall z \notin \overline{B} \Rightarrow |z| > \delta \Longrightarrow$

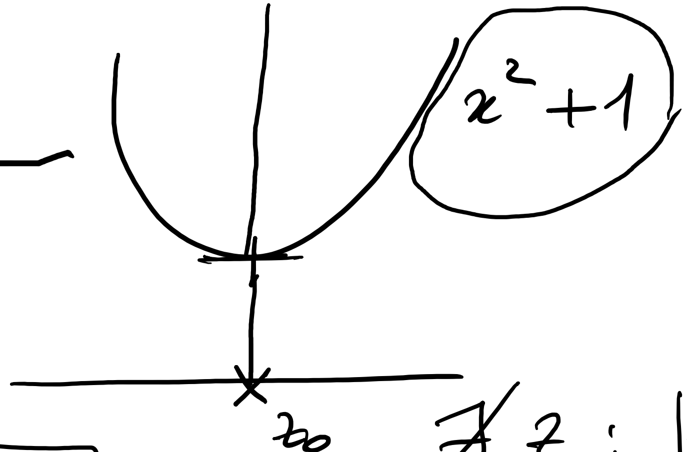
$f(z) > \varepsilon \geq f(z_0) \geq f(z^*)$

$f(z) \geq f(z^*)$ $\forall z \in \mathbb{C}$

$\Longrightarrow$ z^* è minimo globale in $\mathbb{C}$.

Lemma $p:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, polinomio non costante. Sia $z_0\in\mathbb{C}$; $p(z_0)\neq 0$.

Allora $\exists\, \bar z\in\mathbb{C} : |p(\bar z)| < |p(z_0)|$



$\nexists\, z : |z_0|^2 > |z|^2$

DIM DEL TEOR FOND. ALGEBRA

$f(z) = |p(z)|$

1) è continua

2) Per il lemma 1 $\boxed{\lim_{\infty} f(z) = +\infty}$

Per il Th preced. $\exists\, z^*$ di minimo per $|p(z)|$.

Se fosse $|p(z^*)| = 0$ lo zero richiesto p si annulla in z^*, che è lo zero della tesi.

Se fosse $|p(z^*)| \neq 0$ per il Lemma (da dimostrare ancora) $\exists\, \bar z \in \mathbb{C} : |p(\bar z)| < |p(z^*)|$

assurdo perché z^* è di minimo globale

$p(z_0) \neq 0$

$$q(w) = \frac{p(z_0+w)}{p(z_0)} = \sum_0 \alpha_i w^i$$

$n = \deg q = \deg p \geq 1$ perché p non è costante

$$\boxed{q(0) = 1}$$

$$q(0) = \frac{p(z_0+0)}{p(z_0)}$$

$$\boxed{\alpha_0 + \alpha_1 w + \alpha_2 w^2 + \dots \alpha_n w^n}$$

$\alpha_0 = 1$

La tesi equivale a provare che $\exists w : |q(w)| < 1 \iff \frac{|p(\overbrace{z_0+w}^{\bar{z}})|}{|p(z_0)|} < 1$

INIZIO PROVA DEL LEMMA

$$\boxed{p(z) \text{ non costante e } p(z_0) \neq 0 \Rightarrow \exists \bar{z} : |p(\bar{z})| < |p(z_0)|}$$