UNICITA' DELLA PROIEZIONE SU SOTTOSPAZI

Lo scopo di queste poche pagine è di integrare una dispensa precedente nella quale è stato provato che, se $\langle v_1 .. v_k \rangle$ è un sottospazio di X e $v_1 .. v_k$ sono indipendenti, allora il sistema lineare

$$\left(x - \sum_1^k \alpha_i v_i\right) v_j = 0 \qquad j = 1..k$$

ha un'unica soluzione $\bar{\alpha}_i$, per ogni $x \in X$. Ciò consente di definire la proiezione di x su $\langle v_1 .. v_n \rangle$ ponendo

$$x_{\langle v_1 .. v_k \rangle} = \sum_1^k \alpha_i v_i$$

In effetti, la proiezione è un elemento di $\langle v_1 .. v_k \rangle$ tale che $x - x_{\langle v_1 .. v_k \rangle}$ è ortogonale a tutti i vettori $v_1 .. v_k$, e di conseguenza a $\langle v_1 .. v_k \rangle$. Tale proprietà fondamentale della proiezione ortogonale consente poi di dimostrare, mediante il teorema di Pitagora, che $x_{\langle v_1 .. v_k \rangle}$ è l'elemento di $\langle v_1 .. v_k \rangle$ di minima distanza da x.

Il problema rimasto aperto è lo studio della risolubilità del sistema lineare precedente quando i vettori $v_1 .. v_k$ non sono indipendenti. Sarà utile il seguente

LEMMA Sia X un sottospazio di uno spazio euclideo e sia $a \in X \cap X^\perp$. Allora $a = 0$.

DIM Infatti, poiché $a \in X^\perp$ ne segue $ax = 0 \ \forall x \in X$, e poiché $a \in X$, ponendo $x = a$ si ha $0 = aa = |a|^2$, da cui la tesi. $\square$

Dal precedente lemma elementare ne discende il seguente, altrettanto elementare, teorema di unicità.

TEOREMA (di unicità della proiezione). Sia W un sottospazio di X. Siano inoltre

$v, w \in W$ <u>tali che</u>

$$x - v \in W^\perp$$

<u>e</u>

$$x - w \in W^\perp .$$

<u>Allora</u> $v = w$

<u>DIM</u>. Si osservi che entrambi i vettori v e w definiscono una proiezione del vettore x sullo spazio W, in quanto $u - v$ e $u - w$, i "resti" delle proiezioni, sono in $W^\perp$, e quindi sono ortogonali ad ogni vettore di W.

Poiché $W^\perp$ è un sottospazio si ha che

$$w - v = \underbrace{(x - v)}_{\in W^\perp} - \underbrace{(x - w)}_{\in W^\perp} \in W^\perp$$

e, poiché $w, v \in W$, ma anche a $W^\perp$, dal lemma precedente segue $w - v = 0$: basta porre $a = w - v$.

$\blacksquare$

Notiamo che la definizione precedente di proiezione

$$x_W = x_{\langle v_1 \dots v_k \rangle} = \sum_1^k \alpha_i v_i$$

sembrerebbe dipendere non solo dallo spazio $W = \langle v_1 \dots v_k \rangle$, ma anche dal sistema scelto per generarlo, $v_1 \dots v_k$. Non è così! Grazie al teorema di unicità, due "definizioni" di proiezione relative a due diverse basi, $v_1, \dots, v_k$ e $v_1', \dots, v_k'$, di W

$$x_{\langle v_1 \dots v_k \rangle} = \sum \alpha_i v_i \qquad x_{\langle v_1', \dots, v_k' \rangle} = \sum \beta_j v_j'$$

verificano entrambe la condizione di "ortogonalità del resto"

$$x - x_{\langle v_1 \dots v_k \rangle} \perp W \implies x - x_{\langle v_1 \dots v_k \rangle} \in W^\perp$$

e

$$x - x_{\langle v_1', \dots, v_k' \rangle} \perp W \implies x - x_{\langle v_1', \dots, v_k' \rangle} \in W^\perp,$$

per il teorema di unicità coincidono, e definiscono di conseguenza un unico vettore $w = \sum_1^k \alpha_i v_i = \sum_1^k \beta_j v_j'$, anche se le due combinazioni sono diverse nei vettori e nei coefficienti;

Il ragionamento precedente suggerisce come affrontare il problema generale della proiezione su uno spazio arbitrario. Infatti, sia $\langle v_1 \dots v_k \rangle$ lo spazio generato dal sistema, non necessariamente indipendente, $v_1 \dots v_k$. Applicando ripetutamente il Lemma Fondamentale è possibile sopprimere gli elementi che risultano combinazione dei rimanenti, senza alterare lo spazio. È dunque possibile sostituire a $v_1 \dots v_k$ una base per $\langle v_1 \dots v_k \rangle$ estratta da essi, $v_{i_1}, \dots, v_{i_h}$. Per quanto provato in precedenza, esiste unica la proiezione $x_{\langle v_{i_1}, \dots, v_{i_h} \rangle} = \sum_1^h \gamma_j v_{i_j}$, il che fornisce anche la soluzione (coincidente con ogni altra)

$$x_{\langle v_1 \dots v_k \rangle} = \sum_1^k \tilde{\gamma}_j v_j \qquad \text{ove} \qquad \tilde{\gamma}_j = \begin{cases} \gamma_j & \text{se } j = i_j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dunque il sistema $x - w \in \langle v_1 \dots v_k \rangle^\perp$ ha la soluzione $w = \sum_{j=1}^k \tilde{\gamma}_j v_j = \sum_{p=1}^h \gamma_{i_p} v_{i_p}$ e, poiché $x - w \perp \langle v_{i_1}, \dots, v_{i_h} \rangle = \langle v_1 \dots v_k \rangle$, ne segue che è una soluzione del sistema lineare della proiezione, che coincide con quella definita utilizzando $v_{i_1}, .., v_{i_h}$ come base, per il teorema d'unicità.

Riassumendo:

TEOREMA (di esistenza ed unicità della proiezione)

Sia W un sottospazio di X, $\dim X < \infty$.

Allora, per ogni $x \in X$, esiste ed è unico $w \in W$ tale che $x - w \in W^{\perp}$. Il vettore w si definisce proiezione di x su W e si denota con x_W.

Inoltre, per ogni base $w_1 .. w_k$ di W, il vettore $w = \sum_1^k \alpha_i w_i$ può essere calcolato determinando qualunque soluzione $(\alpha_1, .., \alpha_k)$ del sistema lineare

$$\left(x - \sum_1^k \alpha_i w_i\right) w_j = 0 \quad \forall j = 1..k$$

$\boxed{//}$

A titolo di ripasso, proviamo che w è l'elemento di W

di minima distanza da x.

TEOREMA (*della minima distanza*). *Sia* W *un sottospazio di* X, $\dim X < \infty$. *Allora*, *per ogni* $v \in W$ *si ha*

$$|x - v| \geq |x - x_W|$$

DIM. Infatti

$$|x - v|^2 = |x - x_W + x_W - v|^2 =$$

(per il teorema di Pitagora, essendo $x - x_W \perp W$ per la proprietà fondamentale della proiezione ortogonale e $x_W - v \in W$, in quanto differenza di due vettori di W)

$$= |x - x_W|^2 + \underbrace{|x_W - v|^2}_{\geq 0} \geq |x - x_W|^2$$

$\square$

La proiezione così definita estende direttamente quella vista in precedenza per il singolo vettore e per i sistemi ortogonali, conservandone tutte le proprietà essenziali. Non si dispone di una formula agile, come quella di Eulero e Fourier, ma il calcolo è solo di poco più complesso, almeno nel caso di sottospazi di $\mathbb{R}^n$ nei quali la condizione di "ortogonalità del resto" si riduce ad un sistema lineare dotato sempre di soluzione, facilmente risolubile mediante l'algoritmo di eliminazione di Gauss.

A titolo di applicazione dimostriamo il seguente

TEOREMA (*di decomposizione ortogonale*) *Sia* W *sottospazio di* X, $\dim X < \infty$. *Allora*

$$X = W \oplus W^{\perp} \quad \text{e} \quad x = x_W + x_{W^{\perp}}$$

DIM. Poiché, dal lemma iniziale $W \cap W^{\perp} = \{0\}$

ne segue subito che la somma $W+W^\perp$ è diretta.

Per provare che $X=W+W^\perp$ basta osservare che, per ogni $x\in X$, $x-x_W\in W^\perp$ e dunque $x=x_W+(x-x_W)$, ove $x_W\in W$ e $(x-x_W)\in W^\perp$. Proviamo infine che $x_{W^\perp}=x-x_W$. Infatti, $x-(x-x_W)=x_W$ ed inoltre

$$x_W\in W \Longrightarrow x_W\perp W^\perp \quad (\text{"resto ortogonale"}).$$

$\blacksquare$

Un esempio finale: proiettare $\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ su $\left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle$.

In questo caso $W=\langle v_1,v_2\rangle$ con $v_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ e $v_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$; inoltre $x=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ e $X=\mathbb{R}^3$.

Il sistema lineare dell'ortogonalità del resto è

$$\begin{cases}(x-\alpha_1v_1-\alpha_2v_2)v_1=0\\[4pt](x-\alpha_1v_1-\alpha_2v_2)v_2=0\end{cases}$$

Ora $x-\alpha_1v_1-\alpha_2v_2=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}-\alpha_1\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}-\alpha_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-\alpha_2\\2-\alpha_1-\alpha_2\\2-\alpha_1\end{pmatrix}$,

da cui il sistema diventa

$$\begin{pmatrix} 1-\alpha_2 \\ 2-\alpha_1-\alpha_2 \\ 2-\alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad e \quad \begin{pmatrix} 1-\alpha_2 \\ 2-\alpha_1-\alpha_2 \\ 2-\alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

e cioè

$$\begin{cases} 0 = 2-\alpha_1-\alpha_2+2-\alpha_1 = 4-2\alpha_1-\alpha_2 \\ 0 = 1-\alpha_2+2-\alpha_1-\alpha_2 = 3-\alpha_1-2\alpha_2 \end{cases}$$

e infine

$$\begin{cases} 2\alpha_1+\alpha_2 = 4 \\ \alpha_1+2\alpha_2 = 3 \end{cases} \qquad \begin{array}{cc|c} \alpha_1 & \alpha_2 & \\ 2 & 1 & 4 \\ \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ 0 & -3 & -2 \end{array} \quad \mathrm{I}-2\,\mathrm{II}$$

da cui

$$\boxed{\alpha_2 = \frac{2}{3}} \quad e \quad 2\alpha_1 + \frac{2}{3} = 4, \text{ ovvero } \boxed{\alpha_1 = \frac{5}{3}}$$

ed infine la proiezione cercata è

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}_{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle} = \frac{5}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 7/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}$$

In $\mathbb{R}^3$, la possibilità di usare il prodotto vettore offre una strada alternativa. Lo spazio $\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle^\perp$ è generato da un unico vettore ($\dim W = 2$, $\dim W + \dim W^\perp = 3$)

che può essere determinato immediatamente ricordando che

$a \wedge b \in \langle a, b \rangle^{\perp}$, ovvero che il prodotto esterno è ortogonale

ai propri fattori. Ne segue

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{e dunque } W^{\perp} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Allora, invece di determinare la proiezione x_W, calcoliamo

quella su $W^{\perp}$ e otteniamo quella su W da x

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}_{\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle} = \frac{(1,2,2)(-1,1,-1)}{|(-1,1,-1)|^2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

Poiché $x_{W^{\perp}} = x - x_W$ segue

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}_{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}_{\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 7/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}$$

Il lettore può giudicare da sé quale delle due vie risulti più agevole. Di certo, l'uso del prodotto esterno è limitato esclusivamente ad $\mathbb{R}^3$.

Si può comunque continuare ad utilizzare l'identità

$$x = x_W + x_{W^\perp}$$

in qualunque spazio $\mathbb{R}^n$, per decidere quale delle due proiezioni x_W o $x_{W^\perp}$ calcolare, in base alle dimensioni dei due spazi W e $W^\perp$, ricordando che il sistema da risolvere ha un numero di equazioni e di incognite pari al numero di generatori dello spazio, e ricordando – è ovvio – che $\dim W$ non sempre coincide col numero di generatori mediante i quali W è definito! Infine, non sempre uno ha gratis i generatori di $W^\perp$, anche quando ha davanti agli occhi quelli di W! Il loro calcolo costa la risoluzione di un sistema lineare!