IL POLINOMIO DI TAYLOR "OTTIMIZZATO".

L'espressione ottenuta in precedente per il termine di grado k e cioè

$$\frac{1}{k!}\sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n} f_{x_{i_1}\dots x_{i_k}}(x_0)\, w_{i_1} w_{i_2}\cdots w_{i_k}$$

è (notevolmente) ridondante. Esaminiamo per semplicità il caso di termini di grado 2 in due sole variabili, che risulta essere

$$\frac{1}{2!}\left[f_{x_1x_1}(x_0)\, w_1w_1 + f_{x_1x_2}(x_0)\, w_1w_2 + f_{x_2x_1}(x_0)\, w_2w_1 + f_{x_2x_2}(x_0)\, w_2w_2 \right]$$

Ora, non solo $w_1w_2 = w_2w_1$, ma anche $f_{x_1x_2}(x_0) = f_{x_2x_1}(x_0)$, per effetto del teorema di Schwartz sulle derivate miste, in quanto $f \in C^2$. Dunque, la somma può essere abbreviata così

$$\frac{1}{2!}\left[f_{x_1^2}(x_0)\, w_1^2 + 2 f_{x_1x_2}(x_0)\, w_1w_2 + f_{x_2^2}(x_0)\, w_2^2 \right]$$

con il non spregevole risparmio di una (qualunque) delle derivate $f_{x_1x_2}$ o $f_{x_2x_1}$. Il vantaggio è assai più invitante al crescere del grado e del numero delle variabili. Ad esempio, per $n = 3$, sempre nel caso $k = 2$, invece di calcolare

$$\frac{1}{2!}\Big[f_{x_1x_1} w_1^2 + f_{x_1x_2} w_1w_2 + f_{x_1x_3} w_1w_3 + f_{x_2x_1} w_2w_1 + f_{x_2x_2} w_2^2 +$$

$$+ f_{x_2x_3} w_2 w_3 + f_{x_3x_1} w_3 w_1 + f_{x_3x_2} w_3 w_2 + f_{x_3x_3} w_3^2 \Big]$$

basta osservare che

$$f_{x_1x_2} w_1 w_2 = f_{x_2x_1} w_2 w_1 \quad , \quad f_{x_1x_3} w_1 w_3 = f_{x_3x_1} w_3 w_1$$

e

$$f_{x_2x_3} w_2 w_3 = f_{x_3x_2} w_3 w_2$$

da cui si ottiene infine, per il complesso dei termini di II grado,

$$\frac{1}{2!}\left[f_{x_1x_1} w_1^2 + f_{x_2x_2} w_2^2 + f_{x_3x_3} w_3^2 + 2 f_{x_1x_2} w_1 w_2 + 2 f_{x_1x_3} w_1 w_3 + 2 f_{x_2x_3} w_2 w_3\right]$$

Stavolta il risparmio è di ben tre derivate seconde (tutte quelle con gli indici in ordine inverso), pari ad un terzo della fatica totale: davvero interessante!

Per affrontare in modo efficiente il caso generale, supponiamo di aver calcolato un singolo termine

$$f_{x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}}(x_0)\, w_{i_1} w_{i_2} \dots w_{i_k}$$

e stabiliamo quanti sono gli altri termini della somma uguali ad esso. Poiché tutte le derivate della f sono continue, per il teorema di Schwartz possiamo cambiare a nostro piacimento l'ordine delle derivazioni $\partial^k f / \partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}$ in modo da raggruppare per prime tutte le derivazioni rispetto a x_1 (eventualmente assenti), e poi quelle rispetto a x_2, x_3 e così via fino a x_n, ove n è la dimensione dello spazio.

Denotato con μ_i, $i=1..n$, il numero di derivazioni rispetto ad x_i, osserviamo che

- Per ogni $i=1..n$ $\quad 0 \le \mu_i \le k$ ($\mu_1 = 0$ se non ci sono derivate rispetto ad x_1)
- $\sum_{i=1}^{n} \mu_i = k$ (In tutto, k derivate!)
- Tutti i termini che comportano lo stesso numero di derivazioni rispetto alle stesse variabili sono uguali.

Dunque, il termine generale di ordine k sarà

$$\frac{1}{k!} \sum_{\substack{\mu_1,\dots,\mu_n \ge 0 \\ \sum_1^n \mu_i = k}} \binom{k}{\mu_1\,\mu_2 \cdots \mu_n} \frac{\partial^{(k)} f(x_0)}{\partial x_1^{\mu_1} \partial x_2^{\mu_2} \cdots \partial x_n^{\mu_n}} w_1^{\mu_1} w_2^{\mu_2} \cdots w_n^{\mu_n}$$

ove $\binom{k}{\mu_1 \cdots \mu_n}$ è il numero (per ora sconosciuto) dei termini che comportano, in qualsiasi ordine, μ_1 derivate rispetto a x_1, μ_2 rispetto a x_2, .., μ_n rispetto a x_n.

Per contare il loro numero osserviamo che ci sono $\binom{k}{\mu_1} = \frac{k!}{\mu_1!(k-\mu_1)!}$ modi di scegliere la posizione delle μ_1 derivazioni rispetto ad x_1 e, per ognuno d'essi, altri $\binom{k-\mu_1}{\mu_2}$ modi

di "piazzare" le derivazioni rispetto ad x_2 nei $k-\mu_1$ posti

rimasti disponibili dopo aver sistemato le derivazioni rispetto

ad x_1 e, per ogni configurazione delle derivazioni in x_1 e x_2

altri $\binom{k-\mu_1-\mu_2}{\mu_3}$ modi per piazzare le derivate in x_3 e così

via fino ad ottenere il numero ~~totale~~

$$\binom{k}{\mu_1}\binom{k-\mu_1}{\mu_2}\binom{k-\mu_1-\mu_2}{\mu_3}\cdots\binom{k-\mu_1-\mu_2-\cdots-\mu_n}{\mu_n}$$

Ricordando che $\binom{m}{n}=\frac{m!}{n!\,(m-n)!}$, ne segue subito

che

$$\binom{k}{\mu_1\ldots\mu_n}=\frac{k!}{\mu_1!\,\cancel{(k-\mu_1)!}}\cdot\frac{\cancel{(k-\mu_1)!}}{\mu_2!\,\cancel{(k-\mu_1-\mu_2)!}}\cdots\frac{\cancel{(k-\mu_1-\cdots-\mu_{n-1})!}}{\mu_n!\,\underbrace{\left(k-\sum_1^n\mu_i\right)!}_{=0!}}=\frac{k!}{\mu_1!\,\mu_2!\cdots\mu_n!}$$

che, forse, non sarà sempre semplice da calcolare, ma è

certamente ragionevolmente semplice da ricordare.

La forma "rapida" del polinomio di Taylor è dunque

$$\boxed{\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}\sum_{\substack{\mu_1,\ldots,\mu_n\geq 0\\ \sum\mu_i=k}}\frac{k!}{\mu_1!\,\mu_2!\cdots\mu_n!}\,f_{x_1^{\mu_1}\cdots x_n^{\mu_n}}(x_0)\,w_1^{\mu_1}w_2^{\mu_2}\cdots w_n^{\mu_n}}$$

ove
$$\binom{k}{\mu_1 \cdots \mu_n} = \frac{k!}{\mu_1!\,\mu_2!\cdots\mu_n!}$$
<u>è il coefficiente polinomiale di Leibnitz</u>

E' abbastanza evidente che, in pratica, la formula è efficiente perché minimizza il calcolo di derivate, ma occorre di determinare gli "esponenti" $\mu_1 \cdots \mu_n$ in modo efficiente.

Sia $n=3$ e $k=4$. Occorre determinare tutti i modi possibili di scegliere $\mu_1 \mu_2 \mu_3$ $(n=3)$, da 0 a 4 $(k=4)$ in modo da avere $\mu_1+\mu_2+\mu_3=4$. Un efficiente metodo è di elencarli in ordine lessicografico (quello del "dizionario": $0,1,2,3,4$)

μ_1 μ_2 μ_3 (notare che $\mu_3 = 4-\mu_1-\mu_2$)

μ_1	μ_2	μ_3	
0	0	4	Tutte le "parole" che iniziano per 0, e in cui il secondo è scelto ad arbitrio, mentre il terzo è conseguente.
0	1	3	
0	2	2	
0	3	1	
0	4	0	
1	0	3	Così che iniziano per 1, in ordine "alfabetico" (0 prima di 1, 1 prima di 2 ...)
1	1	2	
1	2	1	
1	3	0	

$$\left.\begin{matrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{matrix}\right\}$$ Casi che iniziano con 2

etc....

$$\left.\begin{matrix} 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{matrix}\right\}$$

$$\left.\begin{matrix} 4 & 0 & 0 \end{matrix}\right\}$$

Una volta completato l'elenco delle terne $\mu_1 \mu_2 \mu_3$ utili si può applicare la formula: ad esempio, la terna $\mu_1 = 2$ $\mu_2 = 1$ $\mu_3 = 1$ dà luogo al coefficiente di Leibniz

$$\binom{4}{2\;1\;1} f^{(4)}_{x_1^2 x_2 x_3}(x_0)\, w_1^2 w_2 w_3 = \frac{4!}{2!\,1!\,1!} f_{x_1^2 x_2 x_3}(x_0)\, w_1^2 w_2 w_3 =$$

$$= 12\, f_{x_1^2 x_2 x_3}(x_0)\, w_1^2 w_2 w_3$$

C'è sono dunque 12 termini che includono due derivate rispetto ad x_1, una rispetto ad x_2 ed una rispetto a x_3, e cioè

$x_1\, x_1\, x_2\, x_3$	$x_2\, x_1\, x_1\, x_3$
$x_1\, x_1\, x_3\, x_2$	$x_2\, x_1\, x_3\, x_1$
$x_1\, x_2\, x_1\, x_3$	$x_2\, x_3\, x_1\, x_1$
$x_1\, x_2\, x_3\, x_1$	$x_3\, x_1\, x_1\, x_2$
$x_1\, x_3\, x_1\, x_2$	$x_3\, x_1\, x_2\, x_1$
$x_1\, x_3\, x_2\, x_1$	$x_3\, x_2\, x_1\, x_1$

(Ordine lessicografico rispetto all'alfabeto x_1, x_2, x_3)

L'impiego pratico della formula di Taylor si complica a dismisura al crescere del grado e del numero delle variabili. Anche il calcolo dei coefficienti polinomiali di Leibnitz $\binom{k}{\mu_1 \ldots \mu_n}$ ha le sue difficoltà, ma certamente inferiori a quelle del calcolo di tutte le derivate nella formula originale, a meno che non si tratti di grado e dimensioni estremamente basse.

Un modo per collegare la formula del polinomio di Taylor a quella della potenza di un polinomio (il cosiddetto polinomio di Leibnitz, che generalizza ai polinomi la formula nota per il binomio di Newton) è di scrivere il complesso dei termini d'ordine k così:

$$\frac{1}{k!}\left[\left(w_1\frac{\partial}{\partial x_1}+w_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+w_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^k f\right](x_0)$$

e ricordare che

$$\boxed{\begin{aligned}&(a_1+a_2+\cdots+a_n)^k = \\ &= \sum_{\substack{\mu_1\ldots\mu_n\geq 0\\ \sum\mu_i=k}} \binom{k}{\mu_1\ldots\mu_n} a_1^{\mu_1}a_2^{\mu_2}\ldots a_n^{\mu_n}\end{aligned}}$$

Polinomio di Leibnitz (originale!)

La complessità è purtroppo inerente ai problemi combinatori e c'è un settore intero della Matematica, l'Analisi Combinatoria, che si occupa di come contare in modo efficiente il numero degli elementi di un insieme finito: un problema che si rivela insospettabilmente complesso ed estremamente ostico anche per un computer.... il fattoriale cresce più alla svelta di quanto qualunque elaboratore di dati, <u>ad oggi</u>, possa riuscire a gestire!