SOTTOSPAZI AFFINI

Queste note intendono presentare alcuni risvolti geometrici della teoria degli spazi vettoriali.
Ricordiamo, infatti, che le rette passanti per l'origine sono, per effetto del teorema di Talete, ottimamente rappresentate dai sottospazi di $\mathbb{R}^2$ (o $\mathbb{R}^3$, o anche $\mathbb{R}^n$) di dimensione 1, e cioè generati da un unico vettore non nullo. Qualunque retta non passante per l'origine, però, non è assimilabile ad un sottospazio: ciò nonostante si riesce a rappresentarla come un sottospazio traslato.
L'equazione parametrica di una retta $\gamma(t) = x_0 + tv$ descrive la retta per x_0 nella direzione di v come l'insieme $\{x_0 + tv : t \in \mathbb{R}\}$ e cioè l'insieme $x_0 + \langle v \rangle$. Il punto x_0 può essere scelto ad arbitrio sulla retta, ed il vettore v, la velocità del moto, essere sostituito da un suo qualunque multiplo non nullo.
La definizione seguente generalizza la definizione di retta parametrica a spazi con un numero maggiore di

dimensioni.

<u>DEFINIZIONE</u> <u>Un sottinsieme</u> $X \subseteq \mathbb{R}^n$ <u>si dirà</u> <u>SOTTOSPAZIO AFFINE</u> <u>di</u> $\mathbb{R}^n$ <u>se esistono</u> $x_0, u_1, \dots, u_h \in \mathbb{R}^n$ <u>tali che</u>

$$X = \left\{ x_0 + \sum_1^h \alpha_i u_i \ : \ \alpha_i \in \mathbb{R} \right\} \equiv$$

$$\equiv x_0 + \langle u_1, \dots, u_h \rangle \quad .$$

<u>Ogni vettore appartenente a</u> $\langle u_1, \dots, u_h \rangle$ <u>si dirà</u> <u>uno</u> <u>SPOSTAMENTO</u> <u>sullo (o dello) spazio</u> X.

<u>La dimensione di</u> $\langle u_1, \dots, u_h \rangle$ <u>definisce la</u> <u>dimensione di</u> X.

<u>Alcune note esplicative</u>. Gli spazi affini di dimensione uno si dicono rette (o rette affini), e quelli di dimensione due piani (o piani affini). Per visualizzare meglio la loro struttura basta associare ad ogni vettore

lo spostamento che "trasporta" l'origine nel suo estremo. Gli spazi affini contengono i punti ai quali si giunge compiendo prima uno spostamento dall'origine ad un punto x_0 dello spazio X e poi (l'operazione di somma) un altro scelto fra quelli generati dai vettori d'un sotto-spazio di $\mathbb{R}^n$. Osserviamo esplicitamente che i vettori $u_1 \dots u_h$ non sono necessariamente indipendenti e che, se lo sono, si ha $\dim X = h$. Osserviamo anche che, così come per le rette parametriche (gli spazi affini di dimensione 1), anche nel caso generale la "rappresentazione" di X nella forma $x_0 + \langle u_1, \dots, u_h \rangle$ è lungi dall'essere unica: ogni punto di X può rimpiazzare x_0 senza che lo spazio cambi, perché se $y_0 \in x_0 + \langle u_1, \dots, u_h \rangle$ ne segue che $y_0 - x_0 \in \langle u_1 \dots u_h \rangle$ da cui anche $x_0 - y_0 \in \langle u_1 \dots u_h \rangle$ e dunque $x_0 \in y_0 + \langle u_1 \dots u_h \rangle$; analogamente si possono rimpiazzare $u_1 \dots u_h$ con altri generatori dello spazio $\langle u_1 \dots u_h \rangle$, e siano $v_1 \dots v_k$, per cui

$$\langle u_1, \dots, u_h \rangle = \langle v_1, \dots, v_k \rangle \text{ e dunque } x_0 + \langle u_1 \dots u_h \rangle = x_0 + \langle v_1 \dots v_k \rangle.$$

Tanta libertà, però, solleva un problema "pratico": come fare a riconoscere se due rappresentazioni $x_0 + \langle u_1 \dots u_h \rangle$ e $y_0 + \langle v_1, \dots, v_k \rangle$ siano in realtà relative allo stesso spazio X? Quando, cioè, due spazi affini sono coincidenti? E, già che ci siamo, ... quando sono paralleli? Quando incidenti? Quando sghembe? Riesaminiamo rapidamente la classificazione per le rette, nota dalla geometria greca, che si può riformulare con i vettori come segue

		GENERATORI SPOSTAMENTI multipli	GENERATORI SPOSTAMENTI indipendenti
INTERSEZIONE	vuota	parallele	sghembe
	non vuota	coincidenti	incidenti

È molto facile, con una semplice ispezione del rapporto fra le componenti corrispondenti, stabilire se i generatori degli spostamenti, le velocità, delle due rette siano o meno l'una multipla dell'altra ed è solo di poco più difficile risolvere il sistema ottenuto eguagliando le componenti corrispondenti per stabilire se l'intersezione sia o no vuota.

$\gamma(t) = x_0 + tu \qquad \sigma(s) = y_0 + sv$

L'intersezione è l'insieme delle soluzioni di

$$x_0 + tu = y_0 + sv$$

che è un sistema lineare di 3 equazioni, una per ogni componente, nelle due incognite $t, s \in \mathbb{R}$. Per stabilire invece se $u = \lambda v$ basta osservare che, in forma scalare, essa diventa $u_1 = \lambda v_1$; $u_2 = \lambda v_2$; $u_3 = \lambda v_3$, e dunque i rapporti u_i / v_i , a termini non nulli, devono tutti coincidere.

La situazione si complica nel caso di spazi con più dimensioni.

<u>TEOREMA</u> <u>Dati due spazi affini</u> $X = x_0 + \langle u_1, .., u_h \rangle$ <u>e</u> $Y = y_0 + \langle v_1, .., v_k \rangle$ <u>in</u> $\mathbb{R}^n$, <u>si ha che</u>

$$X = Y \quad (\text{SPAZI COINCIDENTI})$$

<u>se e solo se</u>

1) $\langle u_1, .., u_h \rangle = \langle v_1, .., v_k \rangle$

2) $y_0 - x_0 \in \langle u_1, .., u_h \rangle$

<u>DIM</u>. C.N. $X = Y \Rightarrow$ 1) e 2)

Poiché $y_0 \in Y = X$, esiste $u \in \langle u_1, .., u_h \rangle : y_0 = x_0 + u$ da cui $y_0 - x_0 = u \in \langle u_1, .., u_h \rangle$ e dunque 2).

D'altronde, per ogni $v \in \langle v_1, .., v_k \rangle$ si ha che $y_0 + v \in Y = X$ e dunque esisterà $u \in \langle u_1, .., u_h \rangle : y_0 + v = x_0 + u$, da cui $v = x_0 - y_0 + u$ e dunque $v \in \langle u_1, .., u_h \rangle$ per questo provato più su. Scambiando il ruolo di u e v si prova che ogni spostamento $u \in \langle u_1 .. u_h \rangle$ appartiene anche a $\langle v_1 .. v_k \rangle$ che è la 1).

C.S. 1) e 2) $\Rightarrow X = Y$

Sia $x \in X$ e dunque $x = x_0 + u$ con $u \in \langle u_1, .., u_h \rangle$. Si ha allora $x = y_0 + (x_0 - y_0) + u$ e, da 1) e 2), segue che $(x_0 - y_0) + u \in \langle v_1, .., v_k \rangle$ e dunque $x \in Y$. Analogamente si prova che ogni $y \in Y$ verifica anche $y \in X$, da cui la tesi.

$\blacksquare$

Il risultato precedente suggerisce come verificare che $X = Y$. Infatti $y_0 - x_0 \in \langle u_1, .., u_h \rangle$ equivale a verificare la risolubilità (il che richiede <u>solo</u> la riduzione a scala, e non la risoluzione completa) del sistema lineare

$$\begin{array}{ccc|c} \alpha_1 & \alpha_2 \,.. & \alpha_h & \\ \hline u_1 & u_2 & u_h & y_0 - x_0 \end{array}$$

mentre verificare che $\langle u_1, .., u_h \rangle = \langle v_1, .., v_k \rangle$ equivale a considerare il sistema lineare omogeneo

$$\begin{array}{cccccc|c} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_h & \beta_1 & \beta_2 & \beta_k & \\ \hline u_1 & u_2 \,.. & u_h & v_1 & v_2 \,.. & v_k & 0 \end{array}$$

e verificare che è possibile scegliere un sistema di pivot tutto formato da vettori scelti fra $u_1, \ldots, u_h$ ed un altro tutto formato da vettori scelti fra $v_1, \ldots, v_k$, anche qui senza alcuna necessità di risolvere il sistema per sostituzione all'indietro.

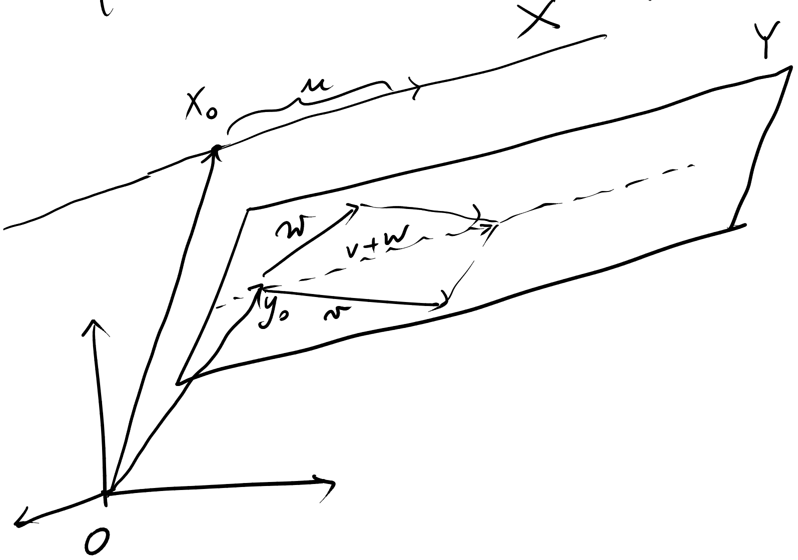
Il criterio corrispondente per due rette parametriche coincidenti è: "Verificare che le velocità siano l'una multipla dell'altra e poi che $x_0 - y_0$ sia anch'esso multiplo delle velocità". Ciò non richiede neppure di dover studiare le intersezioni.

Se invece $x_0 - y_0$ non è multiplo della velocità (una qualunque delle due) allora ci troviamo nel caso delle rette parallele non coincidenti, oggetto della prossima sezione.

Prima di proseguire, però, ricordiamo che se si vuole che il parallelismo sia una relazione d'equivalenza occorre ammettere che ogni retta è parallela a se stessa (proprietà riflessiva), il che obbliga a considerare le rette coincidenti come un sottinsieme delle parallele. Sofismi da matematici!

SPAZI AFFINI PARALLELI

Il caso più semplice, a parte quello delle rette parallele, è quello di una retta parallela ad un piano.



$$X = x_0 + \langle u \rangle$$

(retta $\Rightarrow u \neq 0$)

$$Y = y_0 + \langle v, w \rangle$$

(piano $\Rightarrow v, w$ indipendenti)

Sarebbe una pretesa eccessiva chiedere alla retta di essere parallela a v o a w: in realtà ogni loro combinazione, come $v+w$ indicata in figura, è altrettanto buona. Gli spostamenti su X sono tutti multipli di $v+w$, ai quali corrisponde in Y la retta tratteggiata. Ciò suggerisce la seguente:

DEFINIZIONE: Due sottospazi affini in $\mathbb{R}^n$

$$X = x_0 + \langle u_1, \dots, u_h \rangle \quad \text{e} \quad Y = y_0 + \langle v_1, \dots, v_k \rangle$$

sono detti PARALLELI se e solo se risulta

$$\langle u_1, \dots, u_h \rangle \subseteq \langle v_1, \dots, v_k \rangle$$

<u>oppure</u>

$$\langle v_1, \dots, v_k \rangle \subseteq \langle u_1, \dots, u_h \rangle$$

In sostanza, due spazi (anche di dimensione diverse) sono paralleli se gli spostamenti di almeno uno dei due lo sono anche dell'altro. La verifica "pratica" del parallelismo è simile a quella vista prima: occorre considerare il sistema omogeneo

$$\begin{array}{ccc|c} \alpha_1 \cdots \alpha_h & \beta_1 \cdots \beta_k & \\ \hline u_1 \cdots u_h & v_1 \cdots v_k & 0 \end{array}$$

e verificare che è possibile scegliere un sistema di pivot scelti tutti o fra $u_1 \dots u_h$ o fra $v_1 \dots v_k$ (basta una sola delle due possibilità, mentre sono necessarie entrambe perché gli spazi siano coincidenti, oltre alla condizione su $x_0 - y_0$). E' necessariamente provare il seguente

<u>TEOREMA</u> : <u>Dati due spazi affini paralleli in</u> $\mathbb{R}^n$, X e Y, <u>se</u> $X \cap Y \neq \emptyset$ <u>allora</u>

o $X \subseteq Y$ o $Y \subseteq X$.

Insomma: o non hanno punti comuni (paralleli "genuini") / o uno dei due è incluso nell'altro. Ineccepibile!

DIM. Poiché X e Y sono paralleli si avrà, ad esempio, $\langle u_1, \dots, u_h \rangle \subseteq \langle v_1, \dots, v_k \rangle$.

Si proverà allora che, se $X \cap Y \neq \emptyset$, $X \subseteq Y$.

Infatti, sia $x \in X \cap Y$. Poiché $x \in X$, esiste $u \in \langle u_1, \dots, u_h \rangle$ tale che $x = x_0 + u$. Poiché $u \in \langle u_1, \dots, u_h \rangle \leq \langle v_1, \dots, v_k \rangle$ ne segue che $(x_0 + u) - u \in Y$ e dunque $x_0 \in Y$.
Allora ogni punto di X, della forma $x_0 + u$, è anche un punto di Y, essendo somma di un punto di Y, x_0, e di uno spostamento su Y, $u \in \langle v_1, \dots, v_k \rangle$.

$\blacksquare$

Il criterio precedente, nel caso di due rette, corrisponde al caso delle rette coincidenti perché gli spostamenti sulle due rette, entrambi di dimensione 1, sono uno incluso nell'altro solo se coincidono.

SPAZI AFFINI INCIDENTI E SGHEMBI

La classificazione delle rette suggerisce come comportarsi con gli spazi in generale: diremo incidenti due spazi non inclusi uno nell'altro che si intersecano, e sghembi due spazi non paralleli che non si intersecano.

DEFINIZIONE: Siano X e Y due sottospazi affini di $\mathbb{R}^n$, tali che nessuno degli spazi degli spostamenti di essi è incluso nell'altro. Allora X e Y saranno detti

INCIDENTI se $X \cap Y \neq \emptyset$

SGHEMBI se $X \cap Y = \emptyset$

Lo studio di $X \cap Y$ si riduce, in pratica, alla risoluzione del sistema lineare (in generale) non omogeneo

$$\boxed{x_0 + \sum_1^k \alpha_i u_i = y_0 + \sum_1^k \beta_j v_j} ,$$

mentre l'inclusione fra gli spazi degli spostamenti può essere stabilita come in precedente, studiando il sistema omogeneo

$$\begin{array}{cccccc|c} \alpha_1 & & \alpha_h & \beta_1 & & \beta_k & \\ \hline u_1 & \cdots & u_h & v_1 & \cdots & v_k & 0 \end{array}$$

.

Ignorando la relazione fra parallelismo e coincidenza, la classificazione delle reciproche posizioni degli spazi è (sostanzialmente) identica a quella delle rette

$$U = \langle u_1 \ldots u_h \rangle \qquad X = x_0 + U$$

$$V = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle \qquad Y = y_0 + V$$

$X \cap Y$ \ $U \subseteq V$	sì	no
$= \emptyset$	X e Y paralleli	X e Y sghembi
$\neq \emptyset$	$X \subseteq Y$	X e Y incidenti

Se, invece di sapere che $U \subseteq V$, si sa che $U = V$, allora si possono scambiare i ruoli di X e Y, e da $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq X$ segue $X = Y$: gli spazi sono coincidenti, come prima dimostrato.

Questa classificazione è un tantino grossolana! Consideriamo gli spostamenti U e V degli spazi dati. Sia $U \cap V \neq \{0\}$ e sia $w_1 \dots w_k$ un suo sistema di generatori non nulli. In tal caso X e Y conterranno le coppie di sottospazi paralleli $\{x_0 + \langle w_i \rangle,\ y_0 + \langle w_i \rangle\}$, $\{x_0 + \langle w_i, w_j \rangle$ e $y_0 + \langle w_i, w_j \rangle\}$, ... e così via fino agli spazi $\{x_0 + \langle w_1 \dots w_k \rangle,\ y_0 + \langle w_1 \dots w_k \rangle\}$, che sono addirittura coincidenti se $x_0 - y_0 \in \langle w_1 \dots w_k \rangle$.

Se però $U \supset U \cap V$ e $V \supset U \cap V$ ognuno degli spazi dati consentirà spostamenti proibiti per l'altro e quindi conterrà rette, piani o spazi affini privi di un analogo parallelo (= stessi spostamenti) nell'altro.

Anche due spazi affini con intersezione vuota e spostamenti non inclusi uno nell'altro possono avere spostamenti comuni, e dunque, in dimensioni maggiori, è possibile che due spazi privi di intersezioni contengano, ad esempio, rette tanto parallele (velocità in $U \cap V$) quanto sghembe (velocità indipendenti). Se si vogliono spazi "davvero" sghembi, basta richiedere $U \cap V = \{0\}$, come accade per le rette sghembe.

Il numero maggiore di "gradi di libertà" consente dunque la comparsa di spazi in certo senso intermedi fra quelli paralleli (spazi degli spostamenti inclusi) e quelli "totalmente sghembi" (spazi degli spostamenti con intersezione ridotta a 0). Continueremo a chiamare sghembi tutti gli spazi non paralleli privi di intersezione, ma è bene essere consapevoli che la relazione degli spostamenti dei due spazi può essere più ricca di quella "digitale"

SPOSTAMENTI MULTIPLI

oppure

SPOSTAMENTI PRIVI DI ELEMENTI NON NULLI COMUNI,

tipica della classificazione delle rette affini nello spazio ordinario $\mathbb{R}^3$.

MINIMA DISTANZA FRA SPAZI AFFINI

Senza entrare in tutti i dettagli esposti nel caso delle rette, esaminiamo brevemente il problema di determinare su due spazi affini una coppia di punti per i quali la distanza è minima. Il problema è risolto se gli spazi si intersecano: si possono scegliere due punti coincidenti nell'intersezione, e dunque la distanza è 0. I casi interessanti, di conseguenza, sono quelli di due spazi paralleli ("genuini": non inclusi) o sghembi. In tal caso verrà ripercorsa la strada seguita per le rette, cercando di determinare due punti $x \in X$ e $y \in Y$ tali che $x-y$ sia ortogonale agli spostamenti sia di X, sia di Y. Posto

$X = x_0 + \langle u_1, .., u_h \rangle = x_0 + U \qquad Y = y_0 + \langle v_1, .., v_k \rangle = y_0 + V$

si ricercano i vettori $u \in U$ e $v \in V$ tali che

$$\begin{cases} x_0 + u - (y_0 + v) \in U^\perp \\ x_0 + u - (y_0 + v) \in V^\perp \end{cases}$$

Per meglio apprezzare la struttura del sistema appena scritto, si può porre $u = \sum_1^h \alpha^i u_i$ e $v = \sum_1^k \beta^j v_j$ ottenendo così il sistema lineare nelle $h+k$ incognite α^i e β^j

$$(*)\quad \begin{cases} \sum_{i=1}^h (u_1 u_i)\alpha_i - \sum_{j=1}^k (u_1 v_j)\beta_j = (y_0 - x_0)u_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \sum_{i=1}^h (u_h u_i)\alpha_i - \sum_{j=1}^k (u_h v_j)\beta_j = (y_0 - x_0)u_h \\ \sum_{i=1}^h (v_1 u_i)\alpha_i - \sum_{j=1}^k (v_1 v_j)\beta_j = (y_0 - x_0)v_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \sum_{i=1}^h (v_k u_i)\alpha_i - \sum_{j=1}^k (v_k v_j)\beta_j = (y_0 - x_0)v_k \end{cases}$$

Non proveremo la sua risolubilità. Proveremo invece che se $\bar{u} = \sum_1^h \alpha^i u_i$ e $\bar{v} = \sum_1^k \beta^j v_j$ verificano $(*)$ e dunque $(x_0 + \bar{u} - y_0 - \bar{v}) \in \langle u_1 \ldots u_h\rangle^\perp \cap \langle v_1 \ldots v_k\rangle^\perp$ allora $x_0 + \bar{u} \in X$ e $y_0 + \bar{v} \in Y$ sono di minima distanza fra X e Y.

Siano infatti $x = x_0 + u$ e $y = y_0 + v$ due punti arbitrari in X e Y rispettivamente. Allora

$$|x - y|^2 = |x_0 + u - y_0 - v|^2 = |x_0 + \bar{u} - \bar{u} + u + \bar{v} - \bar{v} - y_0 - v|^2 =$$

$$= \left|(x_0+\bar{u} - y_0-\bar{v}) + (u-\bar{u}+\bar{v}-v)\right|^2 =$$

(per il teorema di Pitagora, in quanto $x_0+\bar{u}-y_0-\bar{v}$ è ortogonale a $\langle u_1 .. u_h\rangle$ e a $\langle v_1 .. v_k\rangle$, e dunque anche a $u, \bar{u}, v, \bar{v}$ e, di conseguenza, a $u-\bar{u}+\bar{v}-v$)

$$= \left|x_0+\bar{u}-y_0-\bar{v}\right|^2 + \left|u-\bar{u}+\bar{v}-v\right|^2 \geq$$

$$\geq \left|x_0+\bar{u}-y_0-\bar{v}\right|^2$$

che prova che $|x_0+\bar{u}-y_0-\bar{v}|$ è minimo globale. $\square$

NOTA: La retta per i punti $x_0+\bar{u}$ e $y_0+\bar{v}$ è detta **retta di minima distanza**, e una "distanza" fra X e Y (seppure impropriamente, in quanto $d(X,Y)=0 \not\Rightarrow X=Y$) si può definire ponendo

$$\boxed{\begin{array}{c} d(X,Y) = |x_0+\bar{u}-y_0-\bar{v}| \\ \text{ove } \bar{u}\in U \text{ e } \bar{v}\in V \text{ verificano} \\ (x_0+\bar{u}-y_0-\bar{v}) \in \langle u_1 \cdots u_h\rangle^\perp \cap \langle v_1 \cdots v_k\rangle^\perp = U^\perp \cap V^\perp \end{array}}$$

La questione della risolubilità del sistema $(*)$, che consente di definire (e di calcolare) $\bar{u}$ e $\bar{v}$, può essere affrontata così come è stato fatto nel caso delle rette sghembe, con qualche complicazione in più. L'esistenza della soluzione del sistema (*) è stata, tra l'altro, oggetto di ricerche da parte del matematico danese J. P. GRAM. In sostanza, se un sistema di vettori $x_1 \dots x_n$ è indipendente, lo è anche quello costituito dalle colonne di

$$\begin{matrix} x_1x_1 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ x_2x_1 & x_2x_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & x_nx_n \end{matrix}$$

che è esattamente la matrice dei coefficienti di (*). L'indipendenza delle colonne implica, per il teorema dei generatori, che (*) ha sempre un'unica soluzione. Il caso in cui gli spostamenti sui due spazi sono dipendenti è più complesso, ed esula dall'ambito di queste brevi note: ad esempio, nel caso delle rette parallele, le soluzioni (le trasversine ferroviarie) sono infinite! Una soluzione, comunque, esiste sempre!