# L'ALGORITMO DI GAUSS E I SOTTOSPAZI DI $\mathbb{R}^n$

I problemi oggetto di questa nota hanno una struttura comune: si supporrà di conoscere due sottospazi $X$ e $Y$, che vengono definiti attraverso sistemi di generatori, e ci si porrà il problema di decidere se $X$ sia incluso o uguale a $Y$, di determinare un sistema di generatori per $X+Y$ o $X \cap Y$, o infine di decidere se $X+Y = X \oplus Y$, ossia se la somma è diretta. Ricordiamo che $X+Y = X \oplus Y$ se e solo se $X \cap Y = \{0\}$.

Il problema in spazi astratti può essere piuttosto critico: ad esempio, per decidere che $\sin^2 t \in \langle 1, \cos 2t \rangle$ nello spazio delle funzioni continue su $\mathbb{R}$ $(C^0(\mathbb{R}))$ occorre conoscere le formule di duplicazione del coseno. La notevole potenza dell'algoritmo di Gauss rende il tutto abbastanza semplice, negli spazi $\mathbb{R}^n$ (o $\mathbb{C}^n$).

## 1) Dati due sistemi di generatori di due sottospazi di $\mathbb{R}^n$ costruire un sistema di generatori per la somma.

Siano $X = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ e $Y = \langle y_1, \dots, y_m \rangle$

Per ogni elemento $z \in X+Y$ per definizione esistono $x \in X$ e $y \in Y$ tali che $z = x+y$.

Poiché $x_1 \dots x_n$ generano $X$ e $y_1 \dots y_m$ generano $Y$, ne segue che esistono $\alpha_i$, $i=1..n$, e $\beta_j$, $j=1..m$, tali che

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \qquad\qquad y = \sum_{j=1}^{m} \beta_j y_j$$

da cui infine

$$z = x + y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j y_j$$

e dunque $X + Y \subseteq \langle x_1 \dots x_n, y_1, \dots y_m \rangle$

È vera anche l'inclusione opposta, in quanto se

$$z \in \langle x_1 \dots x_n, y_1, \dots, y_m \rangle$$

esisteranno $\alpha_i, \beta_j$ tali che

$$z = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j y_j$$

e poiché $\sum_{1}^{n} \alpha_i x_i \in X$ e $\sum_{j=1}^{m} \beta_j y_j \in Y$ ne segue infine

$$z \in X + Y$$

Concludendo

$$\boxed{X + Y = \langle x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_m \rangle}$$

<u>Dunque</u>: <u>un sistema di generatori per lo spazio somma si ottiene considerando l'unione dei due sistemi di generatori dei singoli spazi "addendi"</u>.

Nel caso si fosse interessati ad una base, e non solo ad un sistema di generatori, si può applicare l'algoritmo di Gauss per determinare gli elementi indipendenti (pivot) e decidere quali eliminare. Ciò può essere necessario anche se i sistemi di generatori scelti per i sottospazi sono basi. (il lettore è invitato a costruire un esempio).

## 2) Dati due spazi $X = \langle x_1 \dots x_n \rangle$ e $Y = \langle y_1 \dots y_m \rangle$, come decidere se $X \subseteq Y$?

Per decidere che $X \subseteq Y$ basta verificare che

$$x_1 \in Y \quad x_2 \in Y \quad \dots \quad x_n \in Y$$

Infatti, se $Y$ contiene $x_1 \dots x_n$, essendo un sottospazio, contiene tutte le loro combinazioni lineari e dunque contiene anche $\langle x_1 \dots x_n \rangle = X$.

Una verifica rapida può essere effettuata applicando lo algoritmo di Gauss al sistema lineare

$$y_1 \cdots y_m \;\Big|\; x_1 \cdots x_n$$

($x_1 \dots x_n$ termini noti, $y_1 \dots y_m$ colonne dei coefficienti)

accertandosi che è possibile scegliere i PIVOT fra i <u>soli</u> vettori $y_1 \dots y_m$. In tal caso, scegliendo le incognite NON PIVOT nella forma

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

si ottiene che ciascuno dei vettori $x_1 \dots x_n$ si può esprimere come combinazione lineare delle colonne pivot fra le $y_1 \dots y_m$, e dunque appartiene al loro span.

## 3) Questione analoga alla precedente: stabilire se $X = Y$.

Basta applicare la tecnica precedente per decidere se simultaneamente $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq X$.

In pratica, basta eseguire l'algoritmo di Gauss e verificare che è possibile scegliere i pivot sia fra i (soli) generatori di $X$, sia fra i (soli) generatori di $Y$ (vedi l'esempio in coda).

## 4) <u>Dati</u> $X = \langle x_1 \dots x_n \rangle$ <u>e</u> $Y = \langle y_1 \dots y_m \rangle$, <u>costruire un sistema di generatori per</u> $X \cap Y$

Per ogni vettore $w \in X \cap Y$, poiché esso verifica $w \in X$, ma anche $w \in Y$, si ha che esistono $\alpha_i, \beta_j$ tali che

$$w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \qquad e \qquad w = \sum_{j=1}^{m} \beta_j y_j$$

da cui

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \sum_{j=1}^{m} \beta_j y_j$$

Basta dunque adoperare l'algoritmo di Gauss per determinare tutte le soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i - \sum_{j=1}^{m} \beta_j y_j = 0$$

determinando una base per il sottospazio da esse costituito. Se

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^1 \\ \alpha_2^1 \\ \vdots \\ \alpha_n^1 \\ \beta_1^1 \\ \vdots \\ \beta_m^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1^2 \\ \alpha_2^2 \\ \vdots \\ \alpha_n^2 \\ \beta_1^2 \\ \vdots \\ \beta_m^2 \end{pmatrix} \cdots\cdots \begin{pmatrix} \alpha_1^k \\ \alpha_2^k \\ \vdots \\ \alpha_n^k \\ \beta_1^k \\ \vdots \\ \beta_m^k \end{pmatrix}$$

è una tale base, un sistema di generatori per $X \cap Y$ si ottiene considerando

$$\left\langle \sum_1^n \alpha_i^1 x_i \, , \, \sum_1^n \alpha_i^2 x_i \, , \, \ldots , \, \sum_1^n \alpha_i^k x_i \right\rangle$$

oppure (alternativamente, se più vantaggioso per il calcolo)

$$\left\langle \sum_1^m \beta_j^1 y_j \, , \, \sum_1^m \beta_j^2 y_j \, , \, \ldots , \, \sum_1^m \beta_j^k y_j \right\rangle$$

I sistemi sono identici: infatti, $(\alpha_i^h, \beta_j^h)$ verificano

$$\sum_1^n \alpha_i^1 x_i = \sum_1^m \beta_j^1 y_j \quad \cdots\cdots \quad \sum_1^n \alpha_i^k x_i = \sum_{j=1}^m \beta_j^k y_j$$

Volendo determinare una base per $X \cap Y$ si possono eliminare gli elementi dipendenti usando ancora l'algoritmo di Gauss, ma tali operazione potrebbe non essere necessaria. Infatti:

**Teorema:** sia $(x_i)$, $i=1..n$, una BASE per $X$ e sia $(y_j)$, $j=1..m$, una BASE per $Y$. Sia infine $(\alpha_1^h, \alpha_2^h, \dots, \alpha_n^h, \beta_1^h, \dots, \beta_m^h)$, $h=1..k$, una base per il sottospazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \sum_{j=1}^{m} \beta_j y_j \qquad (*)$$

Allora $v_h = \sum_1^n \alpha_i^h x_i$, $h = 1..k$ è una base per $X \cap Y$.

Dim. Per ogni $w \in X \cap Y$, essendo $(x_i)$ e $(y_j)$ basi, esistono unici $(\alpha_i)$ e $(\beta_j)$ tali che $w = \sum_1 \alpha_i x_i$ e $w = \sum_1 \beta_j y_j$.

Ne segue che l'applicazione

$$T : X \cap Y \longrightarrow \{(\alpha_i, \beta_j) \in \mathbb{R}^{n+m} : \sum_1^n \alpha_i x_i = \sum_1^m \beta_j y_j\}$$

che associa ad ogni vettore $w \in X \cap Y$ l'unica soluzione corrispondente $(\alpha_1 \dots \alpha_n, y_1, \dots, y_m)$ del sistema $(*)$, è biiettiva fra $X \cap Y$ ed il sottospazio delle soluzioni di $(*)$. Allora le controimmagini, mediante $T$, del sistema di vettori indipendenti

$$(\alpha_1^1, \dots \alpha_n^1, \beta_1^1, \dots \beta_m^1) \dots\dots (\alpha_1^k, \dots \alpha_n^k, \beta_1^k, \dots, \beta_m^k)$$

sono indipendenti, e sono costituite dai vettori di $X \cap Y$

$$\sum_1^n \alpha_i^1 x_i \quad \sum_1^n \alpha_i^2 x_i \quad \dots \quad \sum_1^n \alpha_i^k x_i$$

che sono rispettivamente uguali a

$$\sum_1^m \beta_j^1 y_j \ , \ \sum_1^m \beta_j^2 y_j \ , \ \dots \ , \ \sum_1^m \beta_j^k y_j$$

Dunque, essendo $v_h=\sum_1^n \alpha_i^h x_i$ indipendenti, basta dimostrare che generano $X \cap Y$. Infatti, ad ogni vettore $w$ di $X\cap Y$ corrisponde una soluzione (unica) di $(*)$ e sia $(\alpha_1 \dots \alpha_n, \beta_1 \dots \beta_m)$.

Poiché $(\alpha_1^h \dots \alpha_n^h, \beta_1^h, \dots \beta_m^h)$ generano l'insieme delle soluzioni, segue che $\exists\, \lambda_h$, $h=1..k$, tali che

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} = \sum_{h=1}^n \lambda_h \begin{pmatrix} \alpha_1^h \\ \vdots \\ \alpha_n^h \\ \beta_1^h \\ \beta_m^h \end{pmatrix}$$

scambiando l'ordine delle somme

da cui

$$w = \sum_1^n \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^n \sum_{h=1}^k \lambda_h \alpha_i^h x_i = \sum_{h=1}^k \lambda_h \sum_{i=1}^n \alpha_i^h x_i = \sum_{h=1}^k \lambda_h v_h$$

e dunque $X \cap Y \subseteq \langle v_1 \dots v_k \rangle$, ed essendo essi indipendenti, ne costituiscono una base.

▨

Nonostante il risultato non sia proprio immediato, è di facile applicazione: l'algoritmo di Gauss, infatti, consente di determinare agevolmente una base per le soluzioni del sistema $(*)$ dalle quali ricavare quella per $X \cap Y$.

Applichiamo quanto detto ad dei casi pratici.

$$X = \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle \qquad Y = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \right\rangle$$

Le coppie di vettori scelte sono entrambe basi per i relativi sottospazi, in quanto la presenza di zeri assicura che i vettori non siano uno multiplo dell'altro, e siano dunque indipendenti.

Iniziamo col costruire una base per il sottospazio somma. Un sistema di generatori sarà $\left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \right\rangle$ ma di certo non è una base (per eccesso di elementi) dato che siamo in $\mathbb{R}^3$.

Applichiamo l'algoritmo di Gauss.

$$\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array} \xrightarrow[\text{III} - \text{I}]{\text{II} - 2\text{I}} \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \xrightarrow{\text{III} - \text{II}} \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{array}$$

Si può dunque scegliere una base selezionando i tre elementi indipendenti $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ oppure $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$.

A proposito delle altre questioni affrontate, osserviamo subito che certamente $Y \not\subseteq X$ perché la terza colonna $(\in Y)$ è pivot e non dipende dalle prime due, e dunque $X \neq Y$.

La questione se $X \subseteq Y$ richiede un supplemento di indagine: infatti l'algoritmo di Gauss si è interrotto troppo presto (per mancanza di righe), per decidere se i generatori di $X$ sono elementi di $Y$. In realtà ciò si può escludere, perché se fosse $X \subseteq Y$ allora ne seguirebbe $X+Y=Y$, e mentre $\dim Y = 2$ sappiamo già che $\dim(X+Y)=3$.
Se non volessimo usare astuzie, il metodo "forza bruta" consiste nell'impiegare ancora l'algoritmo di Gauss, ma stavolta relegando i generatori di $X$ fra i termini noti, cioè

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III}-2\text{I}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

e ne segue come sia possibile scegliere basi che impiegano, oltre ai generatori di $Y$, anche uno qualunque dei generatori di $X$. Di nuovo $X \not\subseteq Y$, perché $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ è pivot.

Determiniamo ora un sistema di generatori per $X \cap Y$.
Il sistema lineare omogeneo

$$\underbrace{\alpha_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}}_{\in X} = \underbrace{\beta_1\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + \beta_2\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}}_{\in Y}$$

ha soluzione se e solo se i due membri appartengono ad $X \cap Y$

e, portando tutto al I membro conduce a

$$\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \end{array}$$

permutando le prime due righe e le prime due colonne diventa

$$\begin{array}{cc|cc} \alpha_2 & \alpha_1 & \beta_1 & \beta_2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \end{array} \xrightarrow{III - I} \begin{array}{cccc} \alpha_2 & \alpha_1 & \beta_1 & \beta_2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{array} \xrightarrow{III + II} \begin{array}{cccc} \alpha_2 & \alpha_1 & \beta_1 & \beta_2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \end{array}$$

Determiniamo ora una base per lo spazio delle soluzioni.

$$\begin{cases} \alpha_2 + 2\alpha_1 = \beta_2 \\ \alpha_1 - \beta_1 = \beta_2 \\ -3\beta_1 = 2\beta_2 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{array}{l} \beta_1 = -\frac{2}{3}\beta_2 \\ \alpha_1 = \beta_1 + \beta_2 = \frac{1}{3}\beta_2 \quad (*) \\ \alpha_2 = \beta_2 - 2\alpha_1 = \frac{1}{3}\beta_2 \end{array}$$

e dunque ogni soluzione sarà un multiplo di $(1, 1, -2, 3)$, ottenuta ponendo $\beta_2 = 3$ nelle $(*)$

Per determinare un generatore di $X \cap Y$ basta scegliere i soli $\alpha_1$ e $\alpha_2$ (oppure $\beta_1$ e $\beta_2$) e considerare la combinazione corrispondente dei generatori ad essi relativi, e cioè

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ovvero (impiegando $\beta_1$ e $\beta_2$ come generatori di $Y$)

$$\beta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Il fatto che $X \cap Y = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \neq \{0\}$ esclude che la somma fra $X$ e $Y$ sia diretta. Ancora una volta, se la somma fosse stata diretta, avremmo avuto dal teorema di Grassmann sui sottospazi

$$\dim X + Y = \dim X + \dim Y = 4$$

ed essendo $X + Y \subseteq \mathbb{R}^3$ ci sarebbe stato di certo di che lamentarsi. Talvolta i risultati teorici offrono notevoli scorciatoie, ma può capitare sempre il problema resistente a tutte le astuzie: la buona notizia è che in ogni caso non resisterà alla forza bruta!

Una nota finale di natura geometrica: intersecare due spazi di dimensione 2 in $\mathbb{R}^3$ vuol dire intersecare due piani parametrici: se il problema "vero" è questo, bisogna considerare la possibilità di convertire i piani in forma implicita (cartesiana) e studiare il sistema delle due equazioni in tre incognite così ottenuto.