LA SOMMA DIRETTA IN $\mathbb{R}^n$.

In questo breve contributo verrà esaminato il problema di come decidere, in pratica, se la somma di sottospazi $X_1, X_2, \dots, X_k$ di $\mathbb{R}^n$ sia o no diretta.

È bene ricordare che $\sum_{i=1}^{k} X_i = \bigoplus_{i=1}^{k} X_i$ se e solo se $\sum_{1}^{k} x_i = 0$ con $x_i \in X_i \Rightarrow x_i = 0 \ \forall i = 1..k$, il che risulterà utile.

Supponiamo di assegnare gli spazi $X_1 \dots X_k$ attraverso dei sistemi di generatori

$$X_i = \langle A_1^i, A_2^i, \dots, A_{n_i}^i \rangle \qquad i = 1..k$$

In questo caso, per ogni vettore $x_i \in X_i$ esisteranno scalari α_j^i, $j = 1..n_i$, ~~tali~~ che $x_i = \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_j^i A_j^i$, e dunque perché la somma sia diretta deve accadere che

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{n_1} \alpha_j^1 A_j^1}_{x_1} + \underbrace{\sum_{j=1}^{n_2} \alpha_j^2 A_j^2}_{x_2} + \dots + \underbrace{\sum_{j=1}^{n_k} \alpha_j^k A_j^k}_{x_k} = 0 \qquad (*)$$

implichi

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n_1} \alpha_j^1 A_j^1 = 0 \\ \sum_{j=1}^{n_2} \alpha_j^2 A_j^2 = 0 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n_k} \alpha_j^k A_j^k = 0 \end{cases} \qquad (**)$$

NOTA: Attenzione!!! Ciò non implica affatto che tutti gli scalari α_j^i debbano annullarsi (indipendentemente), ma debbono invece annullarsi tutte le combinazioni lineari (**), per ogni soluzione $\left(\alpha_1^1, \dots \alpha_{n_1}^1, \alpha_1^2 \dots \alpha_{n_2}^2, \dots, \alpha_1^k, \dots, \alpha_{n_k}^k\right)$ del sistema lineare omogeneo (*).

Ciò definisce la strategia: determinare tutte le soluzioni di (*) e verificare che tutte le combinazioni in (**) siano nulle.

Vediamolo in un esempio:

$$X_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle \quad X_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \quad X_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

la somma $X_1 + X_2 + X_3$ è diretta?

Si determinano tutte le soluzioni del sistema omogeneo (*), ove si è posto $\alpha_1 = \alpha_1^1$ $\alpha_2 = \alpha_2^1$ $\alpha_3 = \alpha_3^1$ $\beta = \alpha_1^2$ e $\gamma = \alpha_1^3$:

$$\begin{array}{ccccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \beta & \gamma \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{array} \xrightarrow[V-2I \to V]{\substack{II - I \to II \\ IV - 2I \to IV}} \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & -1 \end{array} \xrightarrow[\substack{IV - 2II \to IV \\ V - II \to V}]{III + II \to III}$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -1 \end{array} \xrightarrow{IV \leftrightarrow V} \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}$$

Le incognite pivot sono $\alpha_1, \alpha_2, \beta, \gamma$, e dunque il sistema permette di porre ad arbitrio α_3, e di risolverlo rispetto alle incognite (pivot) rimaste. Ne segue, per sostituzione all'indietro,

$$-2\gamma = 0 \Rightarrow \gamma = 0 \quad \Downarrow$$

$$-3\beta - \gamma = 0 \Rightarrow \beta = 0 \quad \Downarrow$$

$$-\alpha_2 - \beta + \gamma = -\alpha_3 \Rightarrow \alpha_2 = \alpha_3 \quad \Downarrow$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + 2\beta + \gamma = -\alpha_3 \Rightarrow \alpha_1 = -2\alpha_3$$

da cui tutte le soluzioni del sistema (*) sono della forma: $(-2\alpha_3, \alpha_3, \alpha_3, 0, 0)$, $\alpha_3 \in \mathbb{R}$.

Occorre ora verificare tutte le (**), e cioè

$$\underbrace{-2\alpha_3}_{\alpha_1}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\\2\end{pmatrix} + \underbrace{\alpha_3}_{\alpha_2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix} + \underbrace{\alpha_3}_{\alpha_3}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\4\\3\end{pmatrix} = \alpha_3\begin{pmatrix}-2+1+1\\-2+0+2\\0+1-1\\-4+0+4\\-4+1+3\end{pmatrix} = 0 \quad \text{ok}$$

$$\underbrace{0}_{\beta}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\1\\2\\2\end{pmatrix} = 0 \quad \text{ok}$$

$$\underbrace{0}_{\gamma}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix} = 0 \quad \text{ok}$$

Dunque, la somma è diretta.

È bene ricordare che, limitatamente al caso di <u>DUE</u> sottospazi, la somma è diretta se e solo se la loro intersezione è $\{0\}$.

Non è un reale guadagno, perché il calcolo della intersezione comporta essenzialmente non solo la stessa fatica, ma persino le stesse operazioni descritte più su, centrate sulla risoluzione del sistema omogeneo avente per colonne i generatori degli spazi.

Qualche reale guadagno può invece essere ottenuto dall'impiego del teorema di Grassmann, nel caso in cui $\dim X$, $\dim Y$, e $\dim X+Y$ siano di immediata determinazione: infatti, in tal caso,

$$\dim(X \cap Y) = \dim X + \dim Y - \dim X+Y$$

In generale, però, il determinare $\dim X$, $\dim Y$, e $\dim X+Y$ richiede riduzioni a scala di macchinosità (complessiva) non dissimile da quella del metodo presentato più su, che dunque non sembra presentare svantaggi di sorta.