INDIPENDENZA DI RIGHE E COLONNE IN UNA MATRICE QUADRATA

Nella teoria delle matrici inverse è immediato provare che le due inverse, destra e sinistra, se esistono, sono uguali.

$$X = IX = (YA)X = YAX = Y(AX) = YI = Y$$

Utilizzando il concetto di matrice trasposta, si ottiene anche

$$YA = I \iff (YA)^* = I^* = I \iff A^*Y^* = I$$

Ciò lega strettamente il problema dell'esistenza della inversa sinistra, e cioè delle soluzioni dell'equazione matriciale $YA = I$, a quello dell'inversa destra relativo alla matrice trasposta A^*; infatti, se W è la soluzione di $A^*W = I$ allora $Y = W^*$ è la soluzione di $YA = I$, in quanto

$$W^*A = I \iff (W^*A)^* = I^* = I \iff A^*W^{**} = I \iff A^*W = I$$

che è l'equazione risolta da W.

È stato provato in un altro contributo che $AX = I$ è risolubile se le colonne di A sono indipendenti, e quindi sono una base di $\mathbb{R}^n$. Verrà ora provato che le righe (e cioè le colonne della trasposta A^*) sono indipendenti se e solo se lo sono le colonne di A, e dunque le risolubilità dei due problemi $AX = I$ e $YA = I$ (e cioè $A^*W = I$) sono indissolubilmente legate.

TEOREMA Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Allora le righe $A^1, A^2, \dots, A^n$ sono indipendenti se e solo se lo sono le colonne $A_1, \dots, A_n$.

Premettiamo alla prova una **NOTA**: per ogni matrice B, di righe $B^1, \dots, B^n$ e colonne $B_1, \dots, B_n$, il sistema lineare $\sum_1^n x_i B_i = 0$ è identico al sistema

$$\begin{cases} B^1 x = 0 \\ B^2 x = 0 \\ \vdots \\ B^n x = 0 \end{cases}$$

ove si è posto $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Infatti, l'i-esima equazione $\sum_j b_{ij} x_j = 0$ si può anche pensare come il prodotto scalare della riga i-esima $B^i \equiv (b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{in})$ con il vettore colonna x.

DIM. Proviamo che se le colonne $A_1 \dots A_n$ sono indipendenti lo sono anche le righe. Otterremo il teorema opposto applicando lo stesso ragionamento ad A^*.

Siano $x_1 \dots x_n$ tali che $\sum x_i A^i = 0$ e proviamo che $x_i = 0 \ \forall i = 1 \dots n$.

Per la nota precedente, il sistema $\sum_1^n x_i A^i = 0$, le colonne del quale sono le righe di A (e quindi le colonne di A^*), è uguale al sistema

$$A_1 x = 0, \ A_2 x = 0, \ \dots, \ A_n x = 0$$

costruito con le righe di A^* (che sono le colonne di A).

Poiché $A_1 \dots A_n$ sono una base di $\mathbb{R}^n$, esisteranno $\alpha_1 \dots \alpha_n$ tali che $x = \sum_1^n \alpha_i A_i$, da cui

$$|x|^2 = x x = \left(\sum_1^n \alpha_i A_i\right) x = \sum_1^n \alpha_i (A_i x) = 0$$

perché, per il sistema precedente, tutti i prodotti $A_i x$ sono 0.

Ne segue, infine, $x = 0 \iff x_i = 0 \ \forall i = 1..n$.

Come accennato poco più su, se invece si sa che sono indipendenti le righe di A, allora A^* avrà le colonne indipendenti (sono le righe dell'ipotesi), e il ragionamento precedente permette di concludere che le righe di A^* (e cioè le colonne di A) sono indipendenti, il che è la tesi.

$\boxed{///}$

Ne segue il:

TEOREMA: <u>Le due equazioni $AX = I$ e $A^* W = I$ o hanno entrambe soluzione, o non hanno entrambe soluzione.</u>

In effetti, ce l'hanno se le colonne di A sono una base di $\mathbb{R}^n$ e, per il teorema precedente lo sono anche le righe, e non ce l'hanno altrimenti. La stessa conclusione si ottiene assumendo l'indipendenza delle colonne di A^* (che sono le righe di A), il che implica quella delle sue righe (che sono le colonne di A).

Per quanto osservato all'inizio, <u>le due equazioni $AX = I$ e $YA = I$ sono entrambe risolubili</u> (<u>e inoltre</u> $X = Y$) <u>se A ha per colonne (o per righe) una base</u>, <u>mentre non hanno (entrambe) soluzione se le colonne di A sono dipendenti</u>: <u>in tal caso</u> A <u>verrà detta SINGOLARE</u>.

Per questi motivi, non c'è ragione di mantenere la distinzione fra inversa destra e sinistra: se esiste una delle due allora esiste anche l'altra, e coincidono. Dunque, se A è non singolare, la soluzione X delle due equazioni $AX = I$ e $XA = I$ verrà detta **MATRICE INVERSA**.

Il calcolo della matrice inversa di $A = (A_1 \ldots A_n)$ è già stato affrontato quando è stato studiato il calcolo dell'applicazione inversa:

$$AX = I \iff A(X_1 \ldots X_n) = (e_1 \ldots e_n) \iff A_1 \ldots A_n \mid e_1 \ldots e_n$$

Il sistema $A_1 \ldots A_n \mid e_1 \ldots e_n$, risolto con l'algoritmo di Gauss-Jordan, diventa $e_1 \ldots e_n \mid X_1 \ldots X_n$ e produce a secondo membro esattamente la matrice inversa (quando esiste). Il legame fra i due problemi è evidente $Ax = \sum x_i A_i = A(x)$ e $A^{-1}y = \sum y_i A_i^{-1} = A^{-1}(y)$

La notazione matriciale è una notazione estremamente sintetica per le applicazioni lineari. Ciò diverrà ancora più chiaro quando verrà introdotto il concetto di matrice associata ad un'applicazione, e verrà provato che il prodotto di matrici corrisponde alla composizione delle funzioni lineari.

NOTA CONCLUSIVA: la teoria presentata vale solo per le matrici quadrate. Nel caso delle matrici rettangolari si possono verificare comportamenti differenti. Ad esempio, l'equazione $AX = I_m$ con $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ è risolubile se e solo se è risolubile il sistema a termini noti multipli

$$A_1 A_2 \ldots A_n \mid e_1 \ldots e_m \quad (*)$$

Ne segue che $A_1 \ldots A_n$ sono dei generatori di $\mathbb{R}^m$ e, per il teorema della dimensione $n \geq m$. È però possibile, per $n > m$, che i sistemi $(*)$ siano tutti risolubili, pur essendo $A_1 \ldots A_n$ dipendenti, con l'effetto di produrre infinite soluzioni al variare dei parametri non posit. In tal caso si perde l'unicità dell'inversa, così come è stata definita in precedenza, anche se ci si limita solo a quella destra. Nel corso del XX secolo, il concetto di inversa è stato esteso alle matrici rettangolari da diversi matematici: il riferimento d'obbligo è alle **pseudo-inverse di Moore-Penrose**, anticipate nei lavori (a dimensione infinita!) di **Fredholm**.