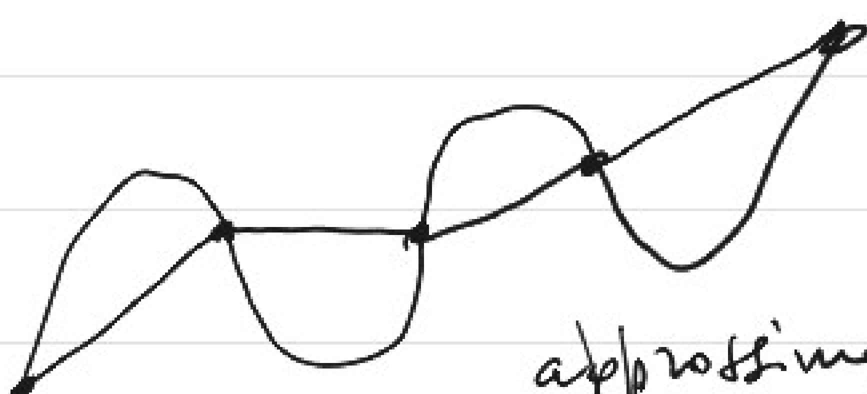
# RETTIFICABILITA' E LUNGHEZZA

Queste note sono dedicate ad una rapida esposizione di uno dei concetti fondamentali, e più antichi, di tutta l'Analisi Matematica. Osserviamo che, volendo introdurre le funzioni seno e coseno, nulla vieterebbe di definirle come rapporto fra il cateto opposto, o quello adiacente, all'angolo che ci interessa e l'ipotenusa di un triangolo rettangolo. Perché, allora, preoccuparsi di misurare gli angoli e, avendo deciso di farlo, perché ostinarsi a misurarli in radianti; il che coinvolge la necessità di maneggiare $\pi$ – uno dei numeri meno maneggevoli della storia – e non tenersi i gradi, come fanno da secoli naviganti e geometri (i vecchi agrimensori).
Il fatto è che la misura in radianti fornisce immediatamente la lunghezza dell'arco di circonferenza unitaria corrispondente

(o CAPACE, come si diceva un tempo) all'angolo in questione. Solo se si misurano gli angoli in radianti (e la velocità angolare in radianti al secondo) la legge che lega velocità angolare e velocità lineare è semplicemente $v = \omega r$, ove $r$ è il raggio.

Il vero problema è: "Come misurare la lunghezza di un arco di circonferenza o, più in generale, di una curva?"

La soluzione del problema, dovuta (essenzialmente) ad Archimede, è basata su una semplice osservazione: fra tutte le curve che congiungono due punti, il segmento è quello più corto. Dunque si possono trovare approssimazioni PER DIFETTO della lunghezza inscrivendo una poligonale nella curva e valutandone la lunghezza misurandone i lati



approssimazione grossolana

approssimazione migliore

ed è sensato e ragionevole (anche se falso!) pensare che debba migliorare utilizzando lati più piccoli. E' tempo di passare alle vie di fatto.

**DEFINIZIONE**: Si definisce CURVA PARAMETRICA in $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ una funzione $\gamma : [a,b] \to \Omega$, con $[a,b]$ intervallo arbitrario.
La variabile $t \in [a,b]$ verrà detta PARAMETRO della curva. L'immagine $\gamma[a,b]$ verrà detta SOSTEGNO.

La curva verrà detta di classe $C^0, C^1, \dots, C^\infty$ se è tale la funzione $\gamma$ che la definisce, e dunque se sono tali le sue COMPONENTI $\gamma_i : [a,b] \to \mathbb{R}$, definite da

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t))$$

# ESEMPI:

1) La curva $\gamma(t) = x + tv$, $t \in [0,1]$ e $x, v \in \mathbb{R}^n$ ha per sostegno il segmento che congiunge $x_0$ e $x_0+v$.
Se $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ le componenti $\gamma_i$ verificheranno

$$\gamma_i(t) = x_i + tv_i$$

2) La curva $\gamma(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$, ha per sostegno la circonferenza unitaria.

Sono entrambe curve $C^\infty$, la prima a valori in $\mathbb{R}^n$, la seconda a valori in $\mathbb{R}^2$.

Utilizzare la rappresentazione parametrica delle curve rende molto facile iscrivere le poligonali, e misurarle.

Prima di farlo, però, osserviamo che una funzione $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, più che definire una curva – o meglio oltre a definire una curva – definisce anche la "legge oraria" con la quale la traiettoria viene descritta. Basta pensare al parametro $t$ come al tempo che scorre, e al vettore $\gamma(t)$ come alla posizione assunta dal punto in movimento all'istante $t$. I due esempi presentati corrispondono a due MOTI fondamentali: quello rettilineo uniforme e quello circolare uniforme. In realtà, è il sostegno a rappresentare meglio la nostra idea di curva. Consideriamo i due esempi

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad t \in [0, 2\pi] \qquad\qquad \sigma(t) = \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix} \quad t \in [0, 2\pi]$$

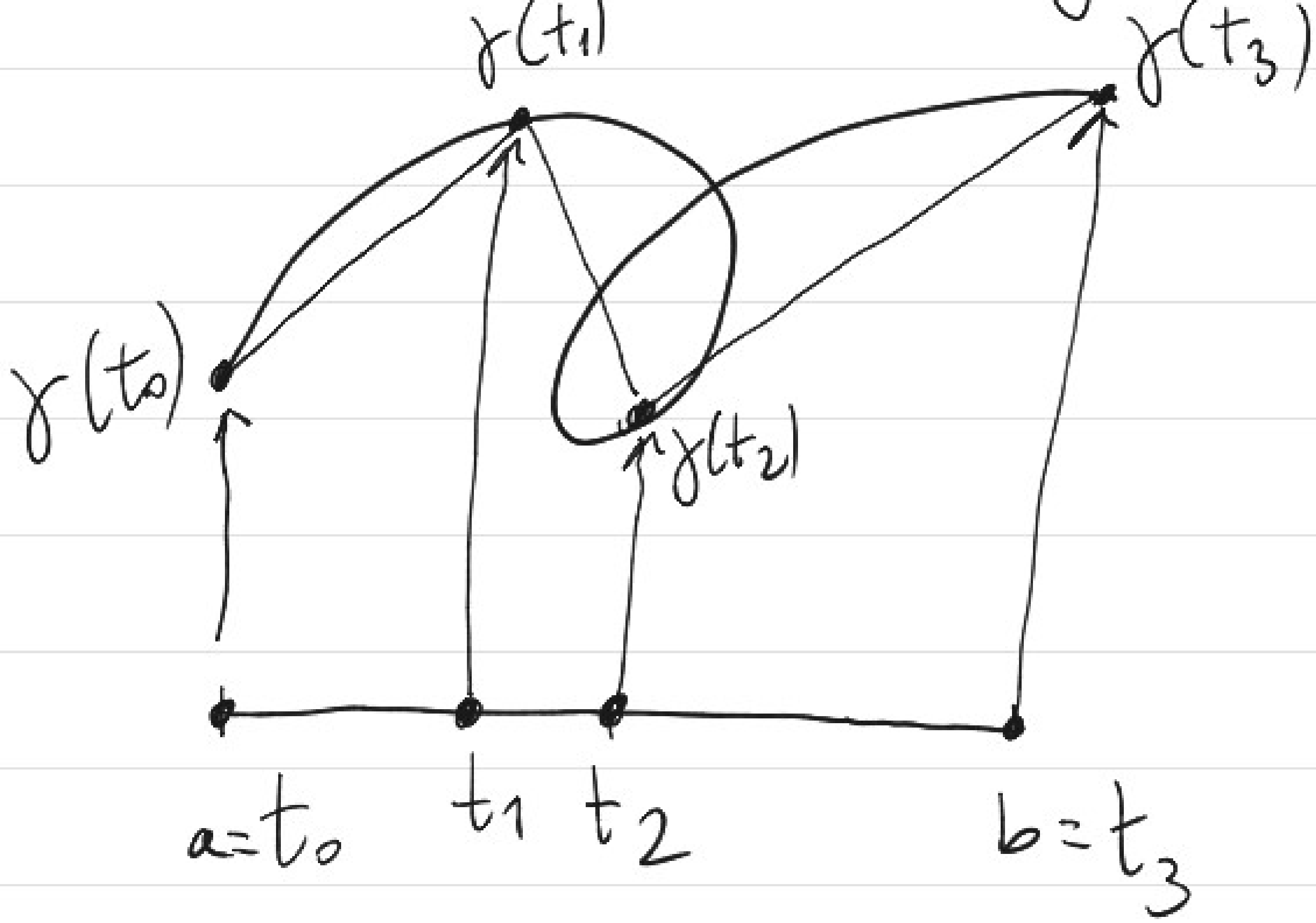
I due sostegni sono uguali (la circonferenza unitaria) ma $\sigma(t)$ gira a velocità doppia e percorre l'intera circonferenza se il parametro (tempo) va da $0$ a $\pi$, e poi la ripercorre quando varia da $\pi$ a $2\pi$. Stessa "curva" (sostegno) nei due casi, ma modo di percorrerla diverso.

DEFINIZIONE: Dato un intervallo arbitrario $[a,b]$, si definisce PARTIZIONE di $[a,b]$ ogni sequenza finita di punti $\Pi = \{t_0, t_1, .., t_n\}$ tali che

$$a = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n = b$$

NOTA: ogni punto di $[a,b]$ appartiene a un solo intervallo $[t_i, t_{i+1}]$, salvo i punti $t_1, .., t_{n-1}$, che appartengono ai due intervalli contigui.

L'idea per iscrivere una poligonale nella curva $\gamma$ è di fissare una partizione dell'intervallo dei parametri e di considerare le loro immagini come vertici della spezzata




Scrivere per esteso l'"equazione parametrica" della spezzata è (inutilmente) noioso. E' invece facile (e importante) scriverne la lunghezza: ogni segmento ha lunghezza pari alla distanza dei propri estremi e, dunque si può introdurre la seguente

DEFINIZIONE: Data una curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ed una partizione $\Pi = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$, si definirà la LUNGHEZZA DELLA POLIGONALE INSCRITTA $\Lambda(\Pi)$, come il numero

$$\Lambda(\Pi) = \sum_{0}^{n-1} |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)|$$

A causa della proprietà del segmento di essere il cammino più breve fra gli estremi, tale numero deve risultare minore della lunghezza di $\gamma$, comunque la si voglia definire.
E' però vero - e già osservato da Antifonte e Brisone (criticati duramente da Aristotele) - che la poligonale tende a "confondersi" con la curva al crescere del numero dei suoi lati e al diminuire della loro lunghezza. E' dunque sensato porre la

DEFINIZIONE: una curva parametrica verrà detta RETTIFICABILE se esiste finito il numero

$$\Lambda(\gamma) \equiv \sup_{\Pi} \Lambda(\Pi)$$

al variare di tutte le possibili partizioni dell'intervallo dei parametri.
Il numero $\Lambda(\gamma)$ verrà detto LUNGHEZZA della curva.

NOTA: esistono curve continue di lunghezza infinita e cioè NON rettificabili, per le quali $\Lambda(\gamma) = +\infty$.

Il resto della nota è dedicata ad individuare delle classi di curve rettificabili sufficientemente ampie da coprire i casi più frequenti nelle applicazioni. Premettiamo però qualche osservazione sugli integrali di funzioni vettoriali.

## IL TEOREMA DI TORRICELLI E LA "DISEGUAGLIANZA TRIANGOLARE" PER GLI INTEGRALI

È stato già visto che l'operazione di derivazione delle curve si effettua componente per componente, indipendentemente.

$$\dot{\gamma}(t) = (\dot{\gamma}_1(t), \dot{\gamma}_2(t), \dots, \dot{\gamma}_n(t))$$

Una conseguenza immediata di ciò è che, se si definisce l'integrale di una curva ponendo

$$\int_a^b \gamma(t)\,dt = \left(\int_a^b \gamma_1(t)\,dt, \ \dots, \int_a^b \gamma_n(t)\,dt\right),$$

si ottiene subito la seguente formula di Torricelli nel caso vettoriale

$$\gamma(d) - \gamma(c) = \int_c^d \dot{\gamma}(t)\,dt$$

Prima di farne buon uso nello studio della rettificabilità, che richiede di stimare $|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)|$, occorre presentare il seguente lemma, che generalizza agli integrali la disuguaglianza triangolare, nota per i vettori e le loro norme,

$$\left|\sum_1^n a_i\right| \le \sum_1^n |a_i|$$

LEMMA: sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Allora

$$\left| \int_a^b \gamma(t)\,dt \right| \le \int_a^b |\gamma(t)|\,dt$$

NOTA: la doppia sbarra verticale qui denota la NORMA in $\mathbb{R}^n$. La prova del risultato analogo per gli integrali <u>scalari</u> è più semplice, in quanto $a \le b$ e valgono $\gamma \le |\gamma|$ e $-\gamma \le |\gamma|$.

DIM. Vedi APPENDICE.

Siamo ora in grado di provare un risultato di rettificabilità di eccellente applicabilità pratica.

TEOREMA: Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva parametrica di classe $C^1$. Allora $\gamma$ è rettificabile e inoltre

$$\Lambda(\gamma) \leq \int_a^b |\dot{\gamma}(t)|\, dt$$

NOTA: la funzione scalare $t \to |\dot{\gamma}(t)|$ è continua su $[a,b]$ e quindi ivi integrabile.

NOTA: con un ragionamento più raffinato si può provare che, in realtà,

$$\Lambda(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)|\, dt$$

e dunque la formula precedente permette di calcolare la lunghezza. La prova è molto delicata, per un resul tutto così intuitivo, visto che $|\dot\gamma|$ è il modulo della velocità e $\Lambda(\gamma)$ è la strada percorsa nell'intervallo di tempo $[a,b]$.

**DIM. del teorema.**

Fissata ad arbitrio una partizione $\Pi = \{a = t_0 \le t_1 \le \dots \le t_n = b\}$ si osservi che, per il teorema di Torricelli,

$$|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| = \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \dot\gamma(t)\, dt \right| \le \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\dot\gamma(t)|\, dt$$

da cui, per la proprietà additiva dell'integrale

$$\Lambda(\Pi) = \sum_0^{n-1} |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| \le \sum_0^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\dot\gamma(t)|\, dt = \int_a^b |\dot\gamma(t)|\, dt$$

La stima precedente non dipende dalla partizione scelta sicché il numero $\int_a^b |\dot{\gamma}(t)|\,dt$ è un maggiorante per l'insieme

$$\{\Lambda(\Pi) : \Pi \text{ partizione di } [a,b]\}$$

Poiché $\Lambda(\gamma) = \sup_{\Pi} \Lambda(\Pi)$ è il <u>minimo</u> di tali maggioranti segue subito

$$\Lambda(\gamma) \leq \int_a^b |\dot{\gamma}(t)|\,dt$$

$\blacksquare$

<u>**NOTA**</u>: L'avere derivata (velocità) continua non è condizione necessaria per la rettificabilità: se si parametrizza una spezzata (certamente rettificabile) usando moti uniformi sulle singole porzioni rettilinee, la velocità "salta" nei vertici della spezzata. D'altronde, essere continua non è sufficiente per la rettificabilità,

in generale, come è stato provato in un altro contributo.
Esiste una condizione sulle componenti necessaria e sufficiente per la rettificabilità di una curva, l'essere a "variazione limitata" ("bounded variation"), ma tali approfondimenti esulano dall'ambito elementare di queste note.
L'estensione di tali concetti alle superficie comportarono un mare di guai. Alla loro messa a fuoco hanno dato fondamentali contributi numerosi matematici italiani, fra i quali vanno citati Leonida Tonelli, fra le due guerre mondiali, ed Ennio De Giorgi, negli anni '60 del secolo scorso.
Una nota di colore: i primi a scontrarsi con le curve non rettificabili non furono i matematici, ma i geografi. Nel tentativo di misurare le coste frastagliatissime della Scozia, scoprirono che usare segmenti sempre più corti non stabilizzava la misura, che invece cresceva a "dismisura". Così nacquero i frattali!

# APPENDICE

Viene qui presentata l'idea di una dimostrazione del lemma precedente sulla "disuguaglianza triangolare" per gli integrali.
Se si utilizza la definizione di integrale nella versione di Mengoli e Cauchy si ricorderà che una approssimazione dell'integrale è offerta dalle somme

$$\Sigma = \sum_{0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i)\gamma(\xi_i)$$

ove $a = t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n = b$ è una partizione del dominio $[a,b]$ e $\xi_i$ è un punto arbitrario in $[t_i, t_{i+1}]$.

Allora $|\Sigma| = \left|\sum_{0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i)\gamma(\xi_i)\right|$ e, per l'ordinaria disuguaglianza triangolare, ne segue

$$\left|\Sigma\right| \leq \sum_{0}^{n-1} \left|(t_{i+1}-t_i)\gamma(\xi_i)\right| = \sum_{0}^{n-1} (t_{i+1}-t_i)\left|\gamma(\xi_i)\right|$$

Al tendere a zero di $\max|t_{i+1}-t_i|$ il primo membro tende a $\left|\int_a^b \gamma(t)\,dt\right|$, mentre l'ultimo tende a $\int_a^b |\gamma(t)|\,dt$, e la tesi è provata. $\blacksquare$

**NOTA:** E' necessario prestare la stessa attenzione richiesta per le funzioni scalari se si intenda applicare la stima ad intervalli i cui estremi $a$ e $b$ non verifichino $a \leq b$.
Se, infatti, $a > b$ la stima è falsa, in quanto il primo membro è positivo e il secondo negativo, salvo che siano nulli.
La stima valida sempre è:

$$\left|\int_a^b \gamma(t)\,dt\right| \leq \left|\int_a^b |\gamma(t)|\,dt\right|$$

ove il valore assoluto al secondo membro, all'esterno dello integrale, fa sì che il valore non dipenda dall'ordine di a e b.