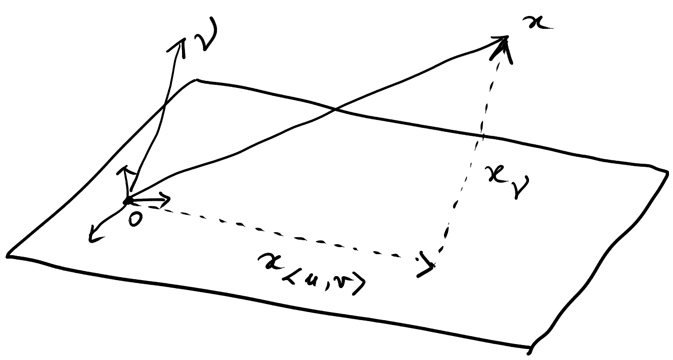
UNA FORMULA "RAPIDA" PER LA DISTANZA DI UN PUNTO DA UN PIANO IN $\mathbb{R}^3$.

Poiché la formula impiega il prodotto vettore, non è d'nessun aiuto in $\mathbb{R}^n$, $n \neq 3$, ove il problema può comunque essere risolto col metodo generale, basato sulla proiezione, e già presentato altrove.

Supporremo inizialmente che il piano passi per l'origine, e sia dunque della forma $\langle u, v \rangle$, con u e v indipendenti.
In queste condizioni $\nu = u \times v$ (ovvero $u \wedge v$) è non nullo, e ortogonale al piano $\langle u, v \rangle$.



(u e v non sono stati indicati per maggior chiarezza: giacciono sul piano, partono dall'origine e non sono allineati.)

Il vettore $\overrightarrow{x_{\langle u,v \rangle}\, x} = x - x_{\langle u,v \rangle}$ è, per il teorema della proiezione, ortogonale a $\langle u, v \rangle$ e quindi parallelo a ν.

La sua lunghezza (la distanza richiesta) è quindi pari a

$$|x_\nu| = \frac{|x \cdot \nu|}{|\nu|} = \frac{|x_1 \nu_1 + x_2 \nu_2 + x_3 \nu_3|}{\sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2}} = \begin{pmatrix} \text{poiché} \\ \nu = u \times v \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\left| x_1 \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} + x_2 \left(- \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \right) + x_3 \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right|}{\sqrt{\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}^2}} = \text{(sviluppo di Laplace)}$$

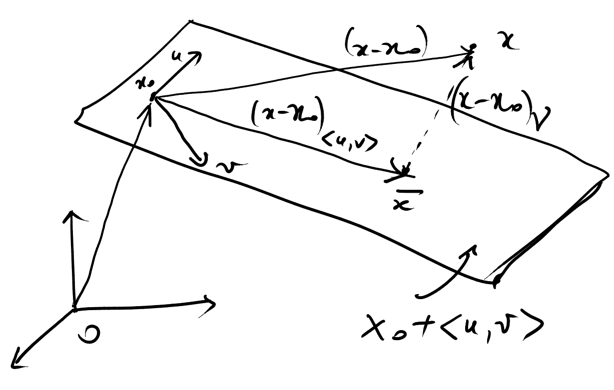
$$= \frac{\left| \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}^2}} = \left(\text{o anche, in forma vettoriale,} \right)$$

$$= \frac{|x \cdot (u \times v)|}{|u \times v|}$$

Il numeratore è detto prodotto triplo scalare (per distinguerlo da $x \times (u \times v)$, prodotto triplo vettore), e le parentesi non sono in realtà necessarie in quanto associare i fattori nell'altro modo — $(x \cdot u) \times v$ — conduce ad un'operazione senza senso: prodotto vettoriale dello scalare $(x u)$ per il vettore v.

Ricordando poi che $\left| \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \right|$ è il volume del parallelepipedo di spigoli x, u e v, e che $|u \times v|$ è l'area della "base" — il parallelogramma di lati u e v — ne segue che la formula dimostrata rappresenta dunque l'altezza, quoziente del volume per l'area di base, che è in effetti la distanza dal piano di base dell'estremo dello spigolo "in alto" x! Nessuna sorpresa, dunque!

La formula è di applicazione diretta, e non soffre della catastrofica complessità del calcolo del determinante, vista la tassativa limitazione $n=3$.
Non è più veloce dell'"altra" scorciatoia in $\mathbb{R}^3$, cioè:
1) Calcolare $\nu = u \times v$; 2) Calcolare la proiezione x_ν; e infine
3) Calcolare la norma $|x_\nu| = \dfrac{|x \cdot \nu|}{|\nu|}$. Ciò richiede esattamente le stesse operazioni.
La solita nota di colore per trattare il caso affine: la distanza di x da $x_0 + \langle u, v \rangle$, piano non passante per l'origine.



In tal caso la distanza richiesta è:

$$|\overrightarrow{\bar{x}x}| = |(x-x_0)_\nu| = \frac{|(x-x_0)\cdot \nu|}{|\nu|},$$

da cui, volendo,

$$d\left(x,\ x_0+\langle u,v\rangle\right)=\frac{\left|\det\begin{pmatrix}(x-x_0)_1 & (x-x_0)_2 & (x-x_0)_3\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{\begin{vmatrix}u_2 & u_3\\ v_2 & v_3\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}u_1 & u_3\\ v_1 & v_3\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}u_1 & u_2\\ v_1 & v_2\end{vmatrix}^2}}$$

Mi sembra di risentire gli stessi discorsi della regola di Sarrus per il determinante: limitazione ad $\mathbb{R}^3$, nessun significativo vantaggio rispetto a $\frac{|(x-x_0)\cdot u\times v|}{|u\times v|}$. Beh.... è difficile cercare di applicarla per $n\neq 3$, perché non si sa cosa mettere al posto di $u\times v$, diversamente da quanto accade per Sarrus che è facile, perfettamente applicabile, ma FALSA!

Concludiamo con il solito esempio, spesso più chiaro di molte spiegazioni.

<u>Calcolare la distanza di</u> $\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$ <u>da</u> $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}\right\rangle$.

Si ha $x=\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$, $x_0=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$, da cui $x-x_0=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $u=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ e $v=\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}$.

La distanza richiesta è:

$$\frac{\left|\det\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 3 & 0 & -1\end{pmatrix}\right|\begin{array}{l}\leftarrow x-x_0\\ \leftarrow u\\ \leftarrow v\end{array}}{\underbrace{\sqrt{\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & -1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 0\end{vmatrix}^2}}_{|u\times v|}}=\frac{\left|3-(3-1)\right|}{\sqrt{1+16+9}}=\boxed{\frac{1}{\sqrt{26}}}$$