ESEMPI DI PERMUTAZIONE DI COLONNE NELL'ALGORITMO DI GAUSS-JORDAN

La breve nota seguente contiene esempi su come procedere per permutare le colonne nell'applicazione dell'algoritmo di Gauss-Jordan.

Iniziamo con $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ che ha un'ottima seconda colonna:

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{array} \xrightarrow{1^a \leftrightarrow 2^a \text{ colonna}} \begin{array}{ccc|c} x_2 & x_1 & x_3 & \\ \hline 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}$$

$$\xrightarrow{\overline{II} \leftrightarrow \overline{III} \text{ riga}}$$

$$\begin{array}{ccc|c} x_2 & x_1 & x_3 & \\ \hline 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array} \xrightarrow{\overline{III} - 2\overline{II}} \begin{array}{ccc|c} x_2 & x_1 & x_3 & \\ \hline 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{array}$$

$$\xrightarrow{\text{dividendo la } \overline{III} \text{ per } 3}$$

$$\begin{array}{ccc|c} x_2 & x_1 & x_3 & \\ \hline 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \xrightarrow{\overline{II} + \overline{III}} \begin{array}{ccc|c} x_2 & x_1 & x_3 & \\ \hline 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}$$

$$\xrightarrow{\mathrm{I}-\mathrm{II}-2\mathrm{III}} \begin{array}{ccc|c} x_2 & x_1 & x_3 & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \quad \text{e cioè} \quad \begin{array}{l} x_2 = 2 \\ x_1 = 1 \\ x_3 = -1 \end{array}$$

Il vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ rappresenta sì la soluzione, ma con le incognite nell'ordine $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}$, e dunque con le prime due righe scambiate.

Le stesse operazioni possono essere effettuate sui sistemi lineari con la stessa matrice dei coefficienti e più termini noti, come accade per calcolare la matrice inversa.

$$\begin{array}{ccc|ccc} x_1 & x_2 & x_3 & & & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \xrightarrow[\text{termini noti inalterati}]{1^a \leftrightarrow 3^a \text{ colonna}} \begin{array}{ccc|ccc} x_3 & x_2 & x_1 & & & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \xrightarrow[\text{permutazione di righe: tutto inalterato}]{\mathrm{II}-\mathrm{III}}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} x_3 & x_2 & x_1 & & & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \xrightarrow[\text{riga divisa per 2}]{\text{la seconda}} \begin{array}{ccc|ccc} x_3 & x_2 & x_1 & & & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\mathrm{I}-\mathrm{II}-\mathrm{III}} \begin{array}{ccc|ccc} x_3 & x_2 & x_1 & & & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

In assenza di permutazioni la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sarebbe stata l'inversa di $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, la matrice dei coefficienti di partenza.

In realtà, però, i valori $1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ della prima riga sono relativi alla variabile x_3, che deve apparire sulla terza riga. Dunque la matrice inversa si ottiene riordinando le righe, permutando la prima e la terza.

Infatti:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 1 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Così come accade nella risoluzione dei sistemi lineari, è dunque necessario tenere traccia dell'effetto di tutte le permutazioni effettuate, il che può essere convenientemente realizzato scrivendo su ogni colonna la variabile ad essa relativa.

Ottenuta la colonna (o la matrice, come accade con termini noti multipli) dei risultati, occorrerà riordinare le RIGHE in base alla sequenza delle variabili finali.

Ad esempio, la sequenza delle incognite $x_2\, x_4\, x_1\, x_3$ richiede di spostare la terza RIGA (che contiene i valori di x_1 per i vari termini noti) al primo posto, la prima riga (relativa ad x_2) al secondo posto (x_2), la quarta (che contiene i valori di x_3) al terzo posto e la seconda (contenente i valori di x_4) al quarto posto.

<u>Concludendo</u>: si può usare liberamente le permutazioni di colonne nell'algoritmo di Gauss-Jordan, con la consueta precauzione di registrare come venga via via alterato l'ordine delle colonne. Un modo a prova d'errore per farlo può essere quello di etichettare le righe del risultato con i nomi delle variabili, nell'ordine registrato (ad esempio:

$$\begin{array}{c|ccc|ccc} & x_3 & x_1 & x_2 & & & \\ \hline x_3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ x_1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

)

e scegliere come prima riga quella etichettata da x_1, come seconda quella etichettata da x_2 e così via fino all'ultima, e dunque $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.