CONVERGENZA DELLE FUNZIONI OMOGENEE NELL'ORIGINE

—

Una delle conseguenze più interessanti della formula di Taylor per le funzioni di una variabile è che, per funzioni sufficientemente regolari nell'intorno di un punto x_0 la differenza $f(x)-f(x_0)$ si comporta come $(x-x_0)^h$ al tendere di x ad x_0, ove h è la prima derivata non nulla in x_0 (se esiste). Ciò permette di studiare il limite $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, supposto che f e g siano ivi infinitesime, sostituendo ad f e g i loro sviluppi di Taylor con relativi resti, cioè

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(x-x_0)^h \frac{f^{(h)}(x_0)}{h!} + o(x-x_0)^h}{(x-x_0)^k \frac{g^{(k)}(x_0)}{k!} + o(x-x_0)^k}$$

e tutto si risolve raccogliendo in evidenza $(x-x_0)^h$ a numeratore, $(x-x_0)^k$ a denominatore, ottenendo

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(x-x_0)^h}{(x-x_0)^k} \cdot \frac{\frac{1}{h!} f^{(h)}(x_0) + \frac{o(x-x_0)^h}{(x-x_0)^h}}{\frac{1}{k!} g^{(k)}(x_0) + \frac{o(x-x_0)^k}{(x-x_0)^k}}$$

e, per definizione di o piccolo, la seconda frazione tende a $\frac{k!}{h!} \frac{f^{(h)}(x_0)}{g^{(k)}(x_0)}$, e dunque tutto si decide confrontando gli ordini h e k delle prime derivate non nulle di f e g. Esattamente lo stesso accadrebbe adoperando il teorema di Bernoulli (detto di de l'Hospital). Poiché per le funzioni di più variabili non esiste un simile teorema, mentre esiste la formula di Taylor, sarebbe di grandissimo interesse il capire come adoperarla per calcolare i limiti. Prima di altre (più dolorose) considerazioni sui resti $o(\dots)$, cominciamo con l'osservare che, mentre in una variabile i termini polinomiali sono potenze (sia a numeratore che a denominatore) direttamente confrontabili e "semplificabili" nulla di simile accade in più variabili.

Infatti supponiamo per semplicità che il punto "fisso" nel quale studiare il limite sia $(0,0)$ e che f e g siano funzioni di due variabili, derivabili quante volte si vuole e nulle nell'origine. Supponiamo infine che qualcuna delle loro derivate parziali (prime) non si annulli. In tal caso

$$f(x,y) = x\, f_x(0,0) + y\, f_y(0,0) + o(\sqrt{x^2+y^2})$$

$$g(x,y) = x\, g_x(0,0) + y\, g_y(0,0) + o(\sqrt{x^2+y^2})$$

Anche se fosse vero (e <u>NON LO È</u>!!) che i resti siano trascurabili, ci si troverebbe a studiare il limite

$$\lim_{x,y\to 0} \frac{\alpha x + \beta y}{\gamma x + \delta y}$$

con uno fra i valori α e β e uno fra γ e δ non nulli, e non è affatto detto che i due complessi dei termini di primo grado si possano semplificare: se fosse $f_x = 1$ $f_y = -1$ $g_x = 1$ $g_y = -1$ la frazione sarebbe $\frac{x-y}{x+y}$ che non è in alcun modo semplificabile, e vedremo presto essere pessima riguardo alla convergenza.

L'unica cosa che hanno in comune le funzioni di una e di più variabili è che, una volta scoperta una derivata parziale non nulla, verrà individuato un polinomio omogeneo costruito con tutte le derivate dello stesso ordine e dunque, invece di rapporti $\frac{(x-x_0)^h}{(x-x_0)^k}$, stavolta occorrerà studiare i rapporti $\frac{p(X-X_0)}{q(X-X_0)}$ ove p e q sono due polinomi omogenei di grado h e k, rispettivamente.

Anche se i resti non esistessero, come nel caso di $f(x,y) = x-y$ e $g(x,y) = x+y$ che verificano $f(0,0) = g(0,0) = 0$ e $f_x(0,0), f_y(0,0), g_x(0,0), g_y(0,0) \neq 0$, e per i quali i resti sono nulli, ci sarebbe comunque il problema di studiare i limiti dei rapporti di polinomi omogenei, che verrà svolto in queste note nel caso più generale delle funzioni (positivamente) omogenee.

Gli strumenti che verranno sviluppati consentiranno di riconoscere subito che gli eventuali resti non sono trascurabili (in generale) rispetto ai termini di ordine più basso.

Lo studio che segue riguarda il comportamento nello origine. Lo studio in (x_0, y_0) può essere svolto sulla funzione $\tilde{f}(u,v) = f(x-x_0, y-y_0)$, che si comporta in $(0,0)$ come f fa in x_0, y_0.

FUNZIONI POSITIVAMENTE OMOGENEE.

La prossima definizione, inutile parlando di polinomi, è indispensabile nel caso generale.

Definizione. Dato $X \subseteq \mathbb{R}^n$, si dice che X è **UN CONO** (rispetto all'origine 0) se

$$x \in X \Rightarrow tx \in X \quad \forall t > 0$$

Dunque se un cono contiene un punto, contiene anche tutta la semiretta per l'origine nella direzione del punto, ma niente si dice dell'origine (notate la disuguaglianza stretta $t > 0$?).

Definizione Una funzione $f : X \to \mathbb{R}$, ove X è un cono, si dirà **α-omogenea**, o anche **omogenea di grado α**, $(\alpha \in \mathbb{R})$ se

$$f(tx) = t^{\alpha} f(x) \quad \forall x \in X \ \forall t > 0$$

Il dover calcolare $f(tx)$ $\forall x$ $\forall t>0$ rende necessario che il dominio di f sia un cono. Notiamo subito che il concetto è più generale di quello di polinomio omogenea. Infatti la funzione $|x|$, definita sul cono $\mathbb{R}^n$ verifica $|tx| = |t||x| = t|x| \quad \forall t>0 \ \forall x$, ed è dunque una funzione omogenea di grado 1, senza essere un polinomio mentre, dato un qualunque polinomio omogeneo di grado k

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_n=k \\ i_1,\dots,i_n \geq 0}} \alpha_{i_1,\dots,i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n}$$

si ha, raccogliendo in evidenza t^k in ogni addendo

$$p(tx) = p(tx_1, t x_{x_2}, \dots, tx_n) = t^k p(x_1 \dots x_n) = t^k p(x)$$

e dunque un polinomio omogeneo di grado k è una funzione k-omogenea.

Un semplicissimo esempio di funzione α-omogenea è la funzione $x \to |x|^\alpha$.

Dalle leggi di moltiplicazione, divisione e potenza di potenze segue subito che

<u>LEMMA</u>: Se f è α-omogenea e g è β-omogenea, definite sullo stesso cono X, allora

$$fg \text{ è } (\alpha+\beta)\text{-omogenea}$$

$$\frac{f}{g} \text{ è } (\alpha-\beta)\text{-}\underline{\text{omogenea}} \ \underline{\text{in}} \ X - \{g=0\}$$

$$f^{\gamma} \text{ è } \alpha\gamma\text{-}\underline{\text{omogenea}}$$

$\boxed{//}$

__Osservazioni__. Se f è 0-omogenea, allora ($t^{\alpha}=1$) e f è costante sui raggi uscenti dall'origine (come per una scala a chiocciola). Un'altra utile osservazione è che, se f è α-omogenea e $x \neq 0$, allora

$$f(x) = f\left(|x| \frac{x}{|x|}\right) = |x|^{\alpha} f\left(\frac{x}{|x|}\right)$$

e dunque una funzione omogenea è completamente individuata dai valori che assume sulla porzione della sfera unitaria che appartiene al proprio dominio X.

Concludiamo con qualche esempio.

La funzione $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$ è definita sull'insieme $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n : x \neq -y\}$ che è un cono, perché $(x,y) \in X \Rightarrow x \neq -y \Rightarrow tx \neq -ty \ \forall t>0 \Rightarrow (tx,ty) \in X$

ed è omogenea di grado 0, perché rapporto di polinomi omogenei di grado 1.

La funzione $\dfrac{x^3-x^2y}{x^2+y^2}$ è definita su $X=\{(x,y)\neq(0,0)\}$ che è un cono perché $(x,y)\in X \Leftrightarrow (x,y)\neq(0,0) \Rightarrow$
$\Rightarrow (tx,ty)\neq t(0,0)=(0,0)$ $\forall t>0 \Leftrightarrow (tx,ty)\in X$,
ed è 1-omogenea, perché rapporto di un polinomio 3-omogeneo e uno 2-omogeneo.

La funzione $\sin\left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)$ è definita nel cono precedente ed è 0-omogenea, perché $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ è 0-omogenea, e dunque costante sui raggi uscenti dall'origine e di conseguenza anche $\sin\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ lo è.

La norma di $\mathbb{R}^n$, essendo una norma, è 1-omogenea; la cosa è riconoscibile anche dal fatto che

$$|x| = \left(\sum x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

e poiché $\sum x_i^2$ è un polinomio 2-omogeneo, la sua potenza $\frac{1}{2}$ è di grado $2\cdot\frac{1}{2}=1$

Infine, le forme quadratiche sono 2-omogenee.

LE FUNZIONI α-OMOGENEE, $\alpha>0$, SONO (PIUTTOSTO SPESSO) INFINITESIME IN 0!

La proprietà prima osservata, per la quale

$$f(x) = |x|^\alpha f\left(\frac{x}{|x|}\right)$$

lascia intravedere qualcosa di buono perché, al tendere di x a 0, anche $|x|$ fa altrettanto e dunque anche $|x|^\alpha$ per $\alpha>0$, per la continuità della composizione di funzioni continue.

L'unico problema, serio, è che non sempre un prodotto uno dei fattori del quale è infinitesimo risulta infinitesimo soprattutto se l'altro fattore fa il diavolo a quattro!

TEOREMA Sia $f: X \to \mathbb{R}$ α-omogenea, con $\alpha>0$. Sia inoltre f limitata su $X \cap \{|x|=1\}$.

Allora $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

Dim. Poiché f è limitata sulla porzione di sfera unitaria che appartiene ad X, esiste $K>0$ tale che

$$|f(w)| \leq K \quad \forall w \in X \cap \{|x|=1\}$$

Allora da

$$0 \leq |f(x)| = |x|^\alpha \left|f\left(\frac{x}{|x|}\right)\right| \leq \left(\text{poiché } \frac{x}{|x|} \in X \cap \{|w|=1\}\right)$$

$$\leq K|x|^\alpha$$

e dal teorema del confronto, poiché $K|x|^\alpha \to 0$ allora anche $|f(x)|$ farà altrettanto. $\blacksquare$

Determinare la costante K, "a mano", vuol dire risolvere la disequazione $|f(x)| \leq K$, con $|x|=1$ e $x \in X$, cosa tutt'altro che banale. La seguente versione fa uso del teorema di Weierstrass per dedurre che K esiste, anche senza calcolarla.

TEOREMA Sia f come sopra, ma inoltre sia continua su X, e infine $X \cap \{|w|=1\}$ sia chiuso. Allora f è infinitesima in $\emptyset$.

Dim.

Per ipotesi, l'intersezione $X \cap \{|w|=1\}$ è chiusa, ed è anche limitata, perché contenuta nella sfera unitaria $B(0,1)$.

Dal teorema di Weierstrass, applicato alla funzione continua $|f|$ ed al chiuso limitato $X \cap \{|w|=1\}$ segue che

$$|f(x)| = |x|^\alpha \left| f\left(\frac{x}{|x|}\right) \right| \leq |x|^\alpha \max_{v \in X \cap \{|w|=1\}} |f(v)|$$

e il ragionamento del teorema precedente si può ripetere prendendo

$$k = \max_{v \in X \cap \{|w|=1\}} |f(v)|$$

<u>Esempio</u>

$$\lim_{x,y \to 0} \frac{x^3 - x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$$

perché $X = \{(x,y) \neq (0,0)\}$ e dunque

$$X \cap \{|w| = 1\} = \{|w| = 1\}$$

che è chiuso (e limitato).

Invece, cosa accade a $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^2+y^2}{x-y}$, che è 1-omogenea come la precedente?

Il dominio è $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\}$ e, intersecando con il cerchio unitario si ottiene l'insieme $\{(x,y) : x^2 + y^2 = 1 \ \text{ e } \ x \neq y\}$, che non è chiuso!

Dunque il teorema non si può adoperare, ma resta il dubbio che risultati meno elementari potrebbero aggirare il problema. Purtroppo, non è così!

Infatti, fissato ad arbitrio un intorno $B(0,\delta)$ si considerino i punti $\left(\frac{\delta}{2}\cos\theta, \frac{\delta}{2}\sin\theta\right)$ che stanno sulla circonferenza di raggio dimezzato (e dunque appartengono all'intorno), ma per i quali risulta

$$f\left(\frac{\delta}{2}\cos\theta, \frac{\delta}{2}\sin\theta\right) = \frac{\frac{\delta^2}{4}(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}{\frac{\delta}{2}(\cos\theta - \sin\theta)} =$$

$$= \frac{\delta}{2}\,\frac{1}{\cos\theta - \sin\theta}$$

che diverge in modulo quando $\theta \to \frac{\pi}{4}$, con segni discordi dalle due parti. Dunque, in ogni intorno (un tempo si sarebbe detto: "comunque piccolo") entrano punti su cui f assume valori arbitrariamente grandi, il che contrasta con la convergenza (la f tutta compresa fra $L-\varepsilon$ ed $L+\varepsilon$ in un opportuno intorno).

Il teorema, dunque, si rompe male! Basta che alla sfera unitaria manchi un punto d'accumulazione, può capitare che f diverga (o diverga in modulo) su una successione ad esso convergente e la festa è finita!

UN CRITERIO "PIU' PRATICO"

Sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione continua α-omogenea, con $\alpha > 0$. Il risultato provato in precedenza assume che il $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ se f è limitata su $X \cap \{|x| = 1\}$. Se tale insieme è chiuso, essendo anche limitato, permette di ottenere la limitatezza di f mediante il teorema di Weierstrass, ma cosa fare se $X \cap \{|x| = 1\}$ NON è chiuso? Il seguente criterio, in apparenza macchinoso, ma molto utile in alcuni casi "reali", offre una risposta.

TEOREMA Se $f : X \to \mathbb{R}$ è continua e α-omogenea, $\alpha > 0$, ed inoltre esiste finito il $\lim_{x \to x_0} f(x)$ per ogni x_0, punto d'accumulazione di $X \cap \{|x| = 1\}$, allora

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

Dim. Si può definire $\tilde{f}$ nei punti d'accumulazione di $X \cap \{|x| = 1\}$ non appartenenti ad esso ponendo

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in X \cap \{|x| = 1\} \\ \lim_{x \to x_0} f(x) & \text{se } x \in \partial(X \cap \{|x| = 1\}) \end{cases}$$

e la continuità di f assicura che le definizioni sono coerenti

sui punti d'accumulazione già appartenenti ad $X \cap \{|x|=1\}$.
La funzione $\tilde{f}$, così definita, è continua sull'insieme chiuso e limitato $X \cap \{|x|=1\} \cup \partial(X \cap \{|x|=1\})$, chiuso perché contiene per definizione i suoi punti di accumulazione e limitato perché sottinsieme di $B(0,1)$.
Ne segue che $\tilde{f}$ è limitata (ed anche f) e di conseguenza lo è, da cui la tesi segue come nel teorema precedente.

ESEMPIO $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x-y}$

Posto $x = \cos\theta$ $y = \sin\theta$ si ottiene, sul cerchio unitario,

$$f(\cos\theta, \sin\theta) = \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\cos\theta - \sin\theta}$$

che è una funzione di una sola variabile θ, di modulo divergente se $\theta \to \frac{\pi}{4}$ e $\theta \to \frac{5}{4}\pi$, che sono esattamente i punti di $\{|(x,y)|=1\}$ NON appartenenti al dominio di f, che è $\{(x,y) \in \mathbb{R} : x \neq y\}$. Dunque f NON è limitata.

ATTENZIONE!!! Una funzione può benissimo essere limitata nell'intorno di un punto senza esserne ivi convergente, come ad esempio $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ intorno a 0.
Dunque, occorre stare attenti: l'esistenza dei limiti

nei punti d'accumulazione del dominio sulla sfera unitaria è una condizione sufficiente, MA NON NECESSARIA, perché f sia sinfuttosa.

LE FUNZIONI 0-OMOGENEE NON CONVERGONO (QUASI MAI...) IN 0.

Le cattive notizie non arrivano mai da sole!

TEOREMA Sia f 0-omogenea non costante fuori dell'origine.

Allora $\lim_{x\to 0} f(x)$ NON ESISTE!

Dim. Se f è non costante fuori di 0, esistono $x_1, x_2 \in X$, non nulli, tali che $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Allora

$$\begin{aligned} f(tx_1) &= f(x_1) \\ f(tx_2) &= f(x_2) \end{aligned} \qquad \forall t>0$$

Scelto allora il solito intorno $B = B(0,\delta)$, si osserva che, essendo $|x_1| \neq 0$ e $|x_2| \neq 0$, segue che

$$tx_1 \in B \quad \text{se} \quad |tx_1| < \delta, \text{ e cioè se } |t| < \frac{\delta}{|x_1|},$$

e che

$$tx_2 \in B \quad \text{se} \quad |t| < \frac{\delta}{|x_2|}$$

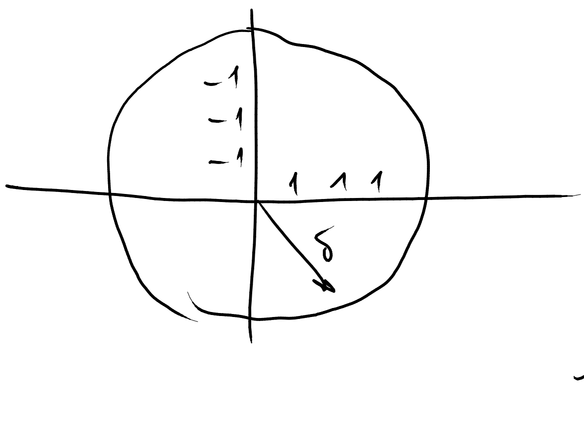
In definitiva, in ogni intorno di 0, esistono punti (quelli dei raggi per l'origine e x_1 e x_2) sui quali f assume i valori $f(x_1) \neq f(x_2)$. Basta allora porre $\varepsilon < |f(x_2) - f(x_1)|$ per vedere violata la condizione necessaria e sufficiente per la convergenza

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x, y \in \operatorname{dom} f \quad |x - x_0| < \delta \quad |y - x_0| < \delta$$
$$x \neq x_0 \quad y \neq x_0 \quad \text{risulta} \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

(CONDIZIONE DI CAUCHY)

e dunque f non converge. $\blacksquare$

Esempi: $\dfrac{x-y}{x+y}$, $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ non sono costanti, e quindi non convergono. Ad esempio, la restrizione di $\dfrac{x-y}{x+y}$ all'asse x $(y=0)$ vale (costantemente) 1, mentre la restrizione all'asse y $(x=0)$ vale -1, da cui



ogni intorno contiene punti sui quali la f vale 1 e altri sui quali $f = -1$

La condizione di Cauchy è violata scegliendo $\varepsilon < 2$.

...E LE α-OMOGENEE CON α NEGATIVO?

... al peggio, non c'è fine!

TEOREMA: Sia f α-omogenea, $\alpha<0$, non identicamente nulla fuori dell'origine.

Allora f non converge in $\underline{0}$.

Dim Sia $x_1 \neq 0$: $f(x_1) \neq 0$. Allora

$$f(tx_1) = t^\alpha f(x_1)$$

Poiché $\alpha<0$, $\lim_{t\to 0^+} t^\alpha = +\infty$ e dunque, essendo $f(x_1) \neq 0$, ne segue che f non è limitata in nessun intorno di 0.

... IN CONCLUSIONE?

E' una questione assai delicata! È abbastanza evidente che se il denominatore si annulla nel punto limite ed il numeratore no, è insensato sperare nella convergenza, ma cosa dire di $\frac{x^2-y^2}{x+y} \equiv x-y$ su $\mathbb{R}^2 - \{x \neq y\}$ che è certamente infinitesima in $(0,0)$.

Una prima questione da affrontare, illustrata bene dall'esempio precedente, è di semplificare tutto il semplificabile, ma la cosa è difficile in più variabili, e ha condotto alla teoria delle "basi di GRÖBNER", davvero troppo per un corso elementare.

Anche se numeratore e denominatore si annullano entrambi nel punto limite, può capitare che i luoghi degli zeri di f e g abbiano direzioni diverse, come ad esempio

$$\frac{x^2-y^2}{y} \qquad \boxed{1\text{-omogenea}}$$

Come fare a farla "scoppiare"? Basta osservare che scegliendo un cammino che, senza toccare mai l'asse x, che è l'insieme singolare $(y=0)$, si può avvicinare ad esso rapidamente, per esempio lungo la parabola cubica

$y=x^3$ ottenendo

$$\frac{x^2-x^6}{x^3} = \frac{1-x^4}{x}$$

da cui, facendo tendere x a zero e mantenendo $y=x^3$ si ha che $|f|$ diverge, nonostante f sia 1-omogeneo. Mentre in una sola variabile i rapporti di infinitesimi non convergenti sono quelli nei quali il denominatore è infinitesimo di ordine superiore rispetto al numeratore, ciò è (in qualche senso) FALSO, almeno se si pensa di identificare l'ordine di infinitesimo con il grado di omogeneità!

Concludendo, non ci sono alternative allo studio degli zeri di numeratore e denominatore, che poi è il problema generale della Geometria Algebrica, la moderna erede della Geometria Analitica di Fermat. Come direbbero gli Anglosassoni

"There is no silver bullet"