ESEMPIO DI CURVA PARAMETRICA CONTINUA, MA NON RETTIFICABILE

Si consideri la funzione

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t = 0 \\ t \sin \frac{1}{t} & t \neq 0 \end{cases}$$

Essa è definita su tutto $\mathbb{R}$ ed è continua (fuori di 0, in quanto prodotto delle funzioni continue t e $\sin \frac{1}{t}$, ma anche in 0, in quanto $f(0) = 0 = \lim_{t \to 0} f(t)$: infatti, fuori di 0, f è prodotto della funzione infinitesima t per quella limitata $\sin \frac{1}{t}$, ed è dunque infinitesima).

Si può allora definire una curva parametrica ponendo

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix} \qquad t \in \mathbb{R}$$

che è la parametrizzazione standard del grafico cartesiano della funzione f. Poiché entrambe le componenti di γ, e cioè t ed $f(t)$, sono continue, γ stessa è continua su $\mathbb{R}$.

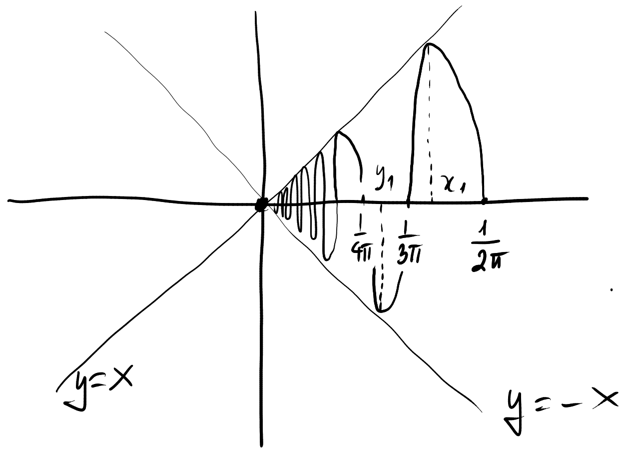
Mostreremo ora che la porzione di curva γ relativa all'intervallo di parametri $\left[0, \frac{1}{2\pi}\right]$ <u>non</u> è rettificabile.

Ricordiamo che $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ (nel nostro caso $n=2$) è rettificabile se $\Lambda(\gamma) = \sup\limits_{\Pi} \Lambda(\Pi) < +\infty$. Dunque, per provare che la curva γ definita prima non è rettificabile si dovrà verificare che

$$\sup_{\Pi} \Lambda(\Pi) = +\infty$$

e cioè che l'insieme (numerico) delle lunghezze delle poligonali inscritte in γ <u>non</u> è superiormente limitato: in definitiva, occorre dimostrare che esistono poligonali inscritte di lunghezza <u>arbitrariamente</u> alta.

Osserviamo che $f\left(\frac{1}{2\pi}\right) = 0$. Il grafico di f relativo a $\left[0, \frac{1}{2\pi}\right]$ è



Gli zeri di f in $\left[0, \frac{1}{2\pi}\right]$ sono, oltre a 0, tutti i punti del tipo $\frac{1}{k\pi}$, con $k \geq 2$.

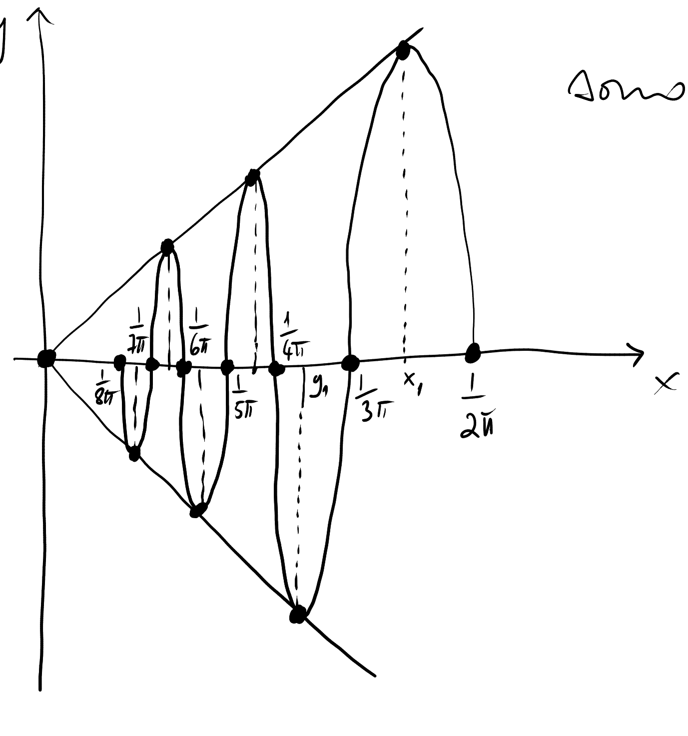
Infatti i punti $x_k = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$ e $y_k = \dfrac{1}{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi}$ sono punti sui quali $\sin\frac{1}{t}$ vale rispettivamente 1 e -1, e dunque sono esattamente i punti nei quali il grafico interseca rispettivamente la prima bisettrice $y=x$, e la seconda $y=-x$.

Fissato ora $k\in\mathbb{N}$, consideriamo la partizione definita dai punti

$$0,\ \frac{1}{2k\pi},\ \frac{1}{\frac{3}{2}\pi+2(k-1)\pi},\ \frac{1}{(2k-1)\pi},\ \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2(k-1)\pi},\ \dots\dots$$

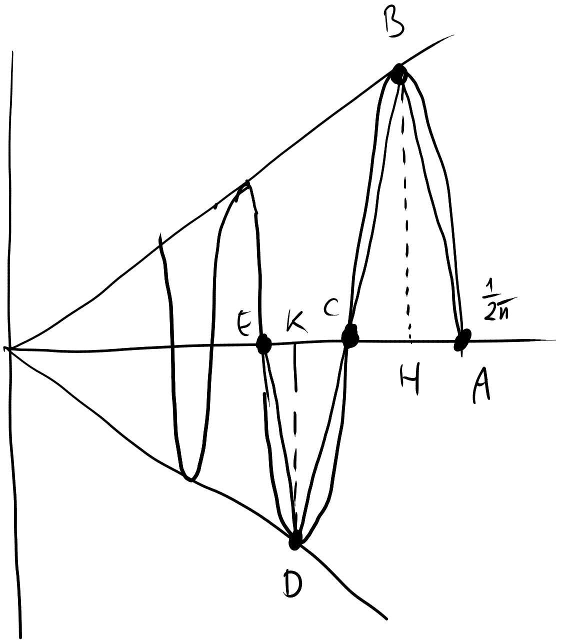
$$\dots\dots,\ \frac{1}{4\pi},\ \frac{1}{\frac{3}{2}\pi+2\pi},\ \frac{1}{3\pi},\ \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi},\ \frac{1}{2\pi}$$

le immagini dei quali (nel caso $k=3$) sul grafico seguente



sono in grassetto

Per stimare (molto) dal basso la lunghezza della poligonale definita da tali punti sarà sufficiente minorare la lunghezza di due lati consecutivi della spezzata con l'altezza del triangolo da essi formato:



$\overline{AB} + \overline{BC} > \overline{BH}$

$\overline{CD} + \overline{DE} > \overline{DK}$

Osservando che

$$BH = f(x_1) = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi}$$

e

$$DK = f(y_1) = \frac{1}{\frac{3}{2}\pi + 2\pi},$$

ripetendo questa stima per ogni "semionda", e trascurando (come minorando con 0) la lunghezza del primo lato $\overline{(0,0)\left(\frac{1}{2k\pi},0\right)}$, si ottiene per la lunghezza della poligonale la stima

$$\Lambda(\pi) \geq \sum_{m=1}^{k} \left[\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2m\pi} + \frac{1}{\frac{3}{2}\pi + 2m\pi} \right] = S_k$$

Il secondo membro è la somma parziale di una serie confrontabile con la serie armonica $\sum \frac{1}{m}$, che diverge. Ne segue che essa stessa è divergente e di conseguenza, per k (numero d'onde complete) sufficientemente alto, si possono ottenere poligonali di lunghezza arbitrariamente grande. $\blacksquare$

Una nota finale: abbiamo appena provato che la continuità non implica la rettificabilità.

Altrettanto può dirsi per il viceversa; si consideri la funzione $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \geq 0 \\ -1 & \text{se } t < 0 \end{cases}$, che è discontinua in $t = 0$. Ciononostante, la parametrizzazione standard del grafico di f su $[-1,1]$; $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$ $t \in [-1,1]$, è rettificabile.

Infatti sia $-1 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ una qualunque partizione di $[-1,1]$ e sia i tale che $0 \in [t_i, t_{i+1}]$. Si ha, allora

$$|\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)| = t_{j+1} - t_j \quad \text{se } j < i \text{ oppure } j > i+1$$

mentre

$$|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| = \sqrt{\begin{pmatrix} t_{i+1} \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t_i \\ -1 \end{pmatrix}} =$$

$$= \sqrt{\begin{pmatrix} t_{i+1} - t_i \\ 2 \end{pmatrix}} \leq \sqrt{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}} = 2\sqrt{2}$$

sicché

$$\sum_{j=0}^{n-1} |\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)| \leq \sum_{j=0}^{i} |\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)| + 2\sqrt{2} + \sum_{j=i+1}^{n} |\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)| =$$

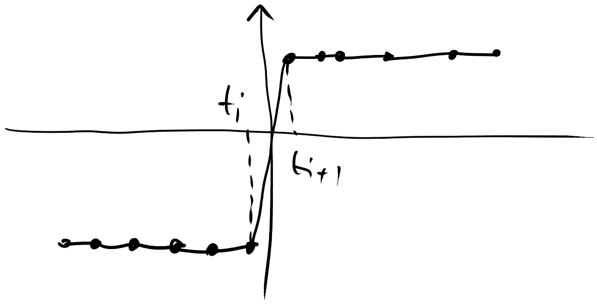
$$= t_i - a + 2\sqrt{2} + b - t_{i+1} \leq b - a + 2\sqrt{2}$$

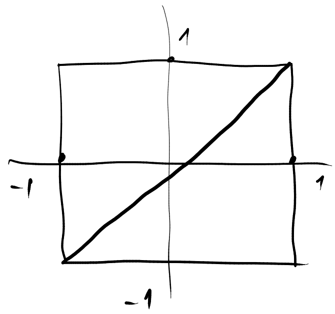
Essendo l'ultimo membro un maggiorante per la lunghezza di qualunque poligonale inscritta in γ, ne segue che

$$\Lambda(\gamma) \leq b - a + 2\sqrt{2}$$

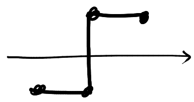
Tale stima ci garantisce la rettificabilità della curva γ, ma è molto grossolana: in realtà, con un po' più di pazienza si può provare che $\Lambda(\gamma) = b-a+2$.

Ciò che abbiamo fatto è stato di stimare la lunghezza dell'unico "scalino"



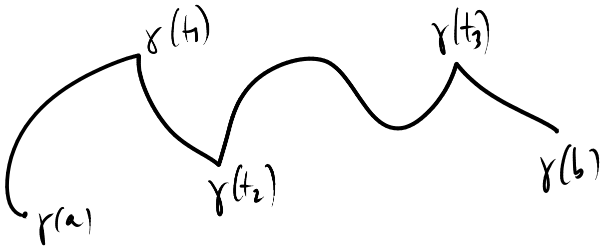


con il lato di spezzata più lungo possibile (situazione che si verifica solo usando una partizione con due soli punti $\{-1, 1\}$).

In realtà, se si utilizzano N punti equispaziati si ottiene la stima migliore per il lato del tipo $\left\| \begin{pmatrix} t_{i+1}-t_i \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\left(\frac{b-a}{N}\right)^2+4}$ che, al divergere del numero di punti, produce la stima "ottimale" $\Lambda(\gamma) = 4$, "quasi esattamente" rappresentata da 

Esiste un'ipotesi di regolarità sulle componenti, molto studiata qui a Pisa da L. Tonelli e dalla sua scuola, che è <u>EQUIVALENTE</u> alla rettificabilità: l'essere a "VARIAZIONE LIMITATA". Tale concetto fornisce un quadro organico molto soddisfacente della problematica della rettificabilità e costituì un solido trampolino per ulteriori sviluppi.

È bene inserire qui un'ultima nota: anche se la continuità non basta per la rettificabilità, e l'essere a variazione limitata è ottimale dal punto di vista teorico, ma difficilmente maneggevole da quello pratico, ci sono ipotesi (di facile verifica) che sono sufficienti per garantirla. La più semplice è $\gamma \in C^1[a,b]$. Una ancora più flessibile è di richiedere che esistano $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = b$ tali che $\gamma \in C^1[t_i, t_{i+1}]$: in sostanza, una "spezzata" con ogni "pezzo" di classe C^1, mentre nei punti di "saldatura" t_i ci possono



essere "spigoli".

Tale ipotesi si rivela adeguata per le "esigenze della vita di tutti i giorni" e permette di ottenere la formula di calcolo della lunghezza che costituisce l'equivalente del teorema di Torricelli per il calcolo degli integrali: infatti

$$\Lambda(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)|\, dt$$

I fisici non si stupiscono particolarmente: se un punto materiale si muove a 100 km/h, anche su traiettorie curve, per un'ora, quanta sarà la strada percorsa? Se invece il modulo della velocità non è costante, si usa il solito "trucco" di sostituire il prodotto v.t con l'integrale di v.dt ... Nulla di nuovo!