MATRICI

(IV)

Matrici trasposte, aggiunte e antiaggiunte.

Un'operazione con applicazioni insospettabilmente importanti che può essere effettuata sulle matrici è la **TRASPOSIZIONE**, e cioè lo scambio fra le righe e le colonne.

Una delle più importanti applicazioni del concetto di matrice trasposta coinvolge il prodotto scalare: come conseguenza di ciò, occorrerà tenere ben distinto nella propria mente il caso complesso da quello reale.

DEFINIZIONE: Data la matrice REALE $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, si definisce la matrice TRASPOSTA $A^* \in \mathbb{R}^{n\times m}$ ponendo

$$(A^*)_{ij} = A_{ji}$$

DEFINIZIONE: Data la matrice COMPLESSA $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, si definisce la matrice AGGIUNTA

$A^* \in \mathbb{C}^{n \times m}$ ponendo

$$(A^*)_{ij} = \overline{A_{ji}}$$

Poiché il coniugato d'un reale coincide col numero stesso ne segue che, in $\mathbb{R}^{m \times n}$, i due concetti coincidono.

LEMMA: $(A^*)^* = A$ per ogni A, reale o complessa.

DIM. $$((A^*)^*)_{ij} = \overline{(A^*)_{ji}} = \overline{\overline{A_{ij}}} = A_{ij} \quad \boxed{//}$$

DEFINIZIONE: A si dice autoaggiunta se $A = A^*$.

NOTA: Se A è reale $A = A^*$ equivale a

$$A_{ji} = A_{ij}$$

e la matrice viene anche detta SIMMETRICA.

Se A è complessa (non reale), invece, si richiede che

$$A_{ji} = \overline{A_{ij}} \qquad \forall i,j$$

e di conseguenza, quando $i = j$,

$$A_{ii} = \overline{A_{ii}}.$$

Dunque, una matrice autoaggiunta complessa ha i termini sulla diagonale a_{ii} REALI, e quelli simmetrici rispetto alla diagonale gli uni coniugati degli altri.

ESEMPI:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^* = A$$

autoaggiunta, e simmetrica reale

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -i & 1+i \\ i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^* = A$$

autoaggiunta complessa

$a_{11} = 2 \in \mathbb{R}$ $\quad a_{22} = 1 \in \mathbb{R}$

$a_{33} = 0 \in \mathbb{R}$ $\quad a_{12} = i = \overline{(-i)} = \overline{a_{21}}$

$a_{13} = \overline{a_{31}} = 1+i$ $\quad a_{23} = \overline{a_{32}} = 0$

$$A = \begin{pmatrix} i & -i & 1 \\ i & 0 & 2+i \\ 1 & 2-i & 1 \end{pmatrix} \qquad A^* \neq A$$

perché $a_{11} = i \neq -i = \overline{a_{11}}$

NOTA: Il modo più semplice di scrivere la trasposta è di prendere i termini della prima riga e scriverli sulla prima COLONNA della trasposta, e seguitare così copiando la seconda riga sulla seconda colonna della trasposta, e così via.

NOTA: la condizione $a^*_{ij} = \overline{a_{ji}}$ implica che se la matrice A è di tipo $m \times n$, allora A^* è di tipo $n \times m$. Per questa ragione, le matrici autoaggiunte devono di necessità essere quadrate.

Una proprietà fondamentale delle matrici trasposte è

TEOREMA: Sia $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$.

Allora $(Ax)y = x(A^*y) \quad \forall x \in \mathbb{C}^n \quad \forall y \in \mathbb{C}^m$

DIM.

Osserviamo che, se $x \in \mathbb{C}^n$, $Ax \in \mathbb{C}^m$ e inoltre, essendo $A^* \in \mathbb{C}^{n \times m}$, da $y \in \mathbb{C}^m$ segue che $A^*y \in \mathbb{C}^n$. Dunque, i due prodotti scalari della tesi sono ben definiti, quello del primo membro in $\mathbb{C}^m$ e quello a secondo membro in $\mathbb{C}^n$; ambo i membri sono scalari complessi e

$$(Ax)\,y = (a_{ij}\,x_j)\,\overline{y_i} = a_{ij}\,x_j\,\overline{y_i}$$

$$x(A^*y) = x_h\,\overline{a^*_{hk}\,y_k} = x_h\,\overline{\overline{a_{kh}}}\,\overline{y_k} = a_{kh}\,x_h\,\overline{y_k}$$

Le due espressioni coincidono per la convenzione di Einstein. $\blacksquare$

Il teorema analogo in $\mathbb{R}^n$ è identico, ma nella prova i coniugati sono superflui, perché i loro argomenti sono tutti reali.

La seguente proprietà, fondamentale nella teoria spettrale, è conseguenza immediata della precedente.

COROLLARIO Sia A autoaggiunta reale (o complessa) di tipo $n \times n$. Allora

$$(Ax)y = x(Ay) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \ (\text{o } \mathbb{C}^n) \quad \blacksquare$$

Un'altra utile proprietà della trasposizione è la seguente:

TEOREMA Siano $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ e $B \in \mathbb{C}^{n \times p}$.

Allora $(AB)^* = B^* A^*$

DIM. Il prodotto AB è definito, e di tipo $m \times p$, e la sua trasposta è di tipo $p \times m$. D'altronde, $B^* \in \mathbb{R}^{p \times n}$ e $A^* \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e dunque $B^* A^*$ è definito, e di tipo $p \times m$. I tipi dei due membri sono dunque uguali. Inoltre,

$$\left((AB)^*\right)_{ij} = \overline{(AB)}_{ji} = \overline{A}_{jh} \overline{B}_{hi}$$

$$\left(B^* A^*\right)_{ij} = B^*_{ik} A^*_{kj} = \overline{A}_{jk} \overline{B}_{ki}$$

e, dalla convenzione di Einstein, segue la tesi.

$\boxtimes$

Un'altra proprietà utile è

TEOREMA: $(A^*)^* = A$

DIM.

$$\left((A^*)^*\right)_{ij} = \overline{(A^*)}_{ji} = \overline{\overline{A}}_{ij} = A_{ij}$$

La trasposizione offre anche la possibilità di scrivere in altro modo i sistemi lineari $Ax=b$, trasponendo i quali si ottiene $(Ax)^* = b^*$, e così $x^*A^* = b^*$, ove x^* è il vettore RIGA delle incognite. Lo stesso artificio permette di affrontare il problema già presentato sull'esistenza dell'inversa destra e sinistra. Infatti, se $A^*Y = I$ ha soluzione allora

$$\begin{array}{ccccc} (A^*Y)^* & = & Y^*(A^*)^* & = & Y^*A \\ \| & & & & \\ I^* = I & & & & \end{array}$$

e dunque se Y risolve $A^*Y=I$ allora Y^* risolve l'equazione $XA=I$, ed è dunque l'inversa sinistra. La questione che lega l'esistenza di soluzioni per $A^*Y=I$ a quella di soluzioni per $AX=I$ (e così all'esistenza della inversa destra) non è banale, ma è ragionevolmente semplice, ed è stata affrontata in un altro contributo.