MATRICI (III)

Prodotti di matrici speciali

Fra la notazione matriciale, per la quale una matrice è un unico oggetto, e quella scalare, per la quale una matrice è un sistema di scalari, c'è qualcosa di intermedio, usato ad esempio nei linguaggi di programmazione: rappresentare una matrice come una "riga di colonne" o come una "colonna di righe". In sostanza:

$$\underset{\text{Matrice}}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ \underbrace{a_{m1} \quad a_{m2}}_{\text{scalari}} & & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} \underset{A_1}{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}} & \underset{A_2}{\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}} & \cdots & \underset{A_n}{\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}} \end{pmatrix}}^{\text{riga di vettori colonna}} =$$

vettori colonna

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} (a_{11} \; a_{12} \; \cdots \; a_{1n}) \\ (a_{21} \; a_{22} \; \cdots \; a_{2n}) \\ \vdots \\ (a_{m1} \; a_{m2} \; \cdots \; a_{mn}) \end{pmatrix}}_{\text{colonna di vettori riga}} \begin{matrix} A^1 \\ A^2 \\ \vdots \\ A^m \end{matrix}$$

vettori riga

Questo approccio è già stato adoperato nel definire il prodotto righe per colonne

$$A = \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \\ \vdots \\ A^m \end{pmatrix}, \quad B = (B_1 \dots B_n), \quad A^i, B_j \in \mathbb{R}^n$$

$$(AB)_{ij} = A^i B_j \quad \left(\begin{matrix}\text{prodotto scalare} \\ \text{di vettori}\end{matrix}\right)$$

Esamineremo alcuni casi speciali, che utilizzano in vario modo la struttura per righe o per colonne.

1) Sia $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$. Allora $Ax \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ e inoltre

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

Ne segue che la forma matriciale di un sistema lineare di m equazioni nelle n incognite $x_1 \dots x_n$ è, semplicemente,

$$Ax = b \qquad A \in \mathbb{R}^{m \times n},\ x \in \mathbb{R}^n,\ b \in \mathbb{R}^m$$

Quando si parla di prodotto <u>matrice per vettore</u> si fa riferimento ad un prodotto (anzi, a due) di matrici, una delle quali è un vettore-riga o un vettore-colonna (che sono entrambi MATRICI, e non vettori). Più in dettaglio: se $x \in \mathbb{R}^n$ e $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, il prodotto Ax è definito rappresentando x come il vettore colonna $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, mentre il prodotto yA è definito, per $y \in \mathbb{R}^m$ ed $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, intendendo il vettore y come un vettore riga, ed eseguendo il prodotto yA come un prodotto di matrici.

2) Una semplice osservazione, carica di conseguenze, è che

$$AB = A(B_1\ B_2 \cdots B_n) = (AB_1\ \ AB_2 \cdots AB_n)$$

e cioè: la prima colonna della matrice prodotto AB, che ha per elementi i prodotti scalari delle righe di A per la prima colonna di B, e cioè B_1, coincide con il prodotto matrice per "vettore" (colonna) AB_1, e così per le altre colonne. Una conseguenza utilissima, fra innumerevoli altre, è la possibilità di risolvere equazioni con incognite matrici ed, in particolare, di risolvere il problema di calcolare l'inversa di una matrice. Infatti,

$$AX = B \iff A(\underbrace{X_1\, X_2 \cdots X_n}_{\text{colonne incognite di } X}) = (\underbrace{B_1\, B_2 \cdots B_n}_{\text{colonne note di } B})$$

e dunque $AX = B$ equivale agli n sistemi lineari

$$AX_1 = B_1 \ ; \ AX_2 = B_2 \ ; \ \dots \ ; \ AX_n = B_n$$

la risoluzione dei quali può essere affrontata in modo efficiente mediante l'algoritmo di Gauss-Jordan.

Nel caso della matrice inversa, $AX = I$ equivale a

$$A(X_1 X_2 \dots X_n) = (e_1 \dots e_n)$$

ove $e_1 \dots e_n$, i vettori della base canonica, sono le colonne della matrice identica, e dunque equivale agli n sistemi lineari $AX_i = e_i$: nella notazione dell'algoritmo di Gauss-Jordan, il sistema con matrice dei coefficienti A e termini noti multipli $e_1 \dots e_n$

$$\left.\overline{\underbrace{A_1 A_2 \cdots A_n}_{\text{colonne di } A}}\ \right|\ \underbrace{e_1 e_2 \cdots e_n}_{\text{colonne di } I}$$

Dunque, le equazioni matriciali $AX = B$ sono, in pratica, sistemi lineari (con coefficienti delle incognite comuni) da risolvere simultaneamente, con le colonne di X come incognite.

3) Un'analoga osservazione riguarda le righe

$$\begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \\ \vdots \\ A^m \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} A^1 B \\ A^2 B \\ \vdots \\ A^m B \end{pmatrix}$$

(RIGHE moltiplicando da sinistra
COLONNE da destra!)

4) Il prodotto $\underbrace{(A_1 A_2 \dots A_n)}_{A} e_i$ vale A_i. In effetti il "vettore" colonna e_i ha componenti $e_{h1} = \begin{cases} 1 & \text{se } h = i \\ 0 & \text{se } h \neq i \end{cases}$

da cui $(Ae_i)_{k1} = a_{kh} e_{h1} = a_{ki}$ e dunque, al variare di k, $(Ae_i)_k$ descrive i termini della colonna i-esima. Analogamente $e_i A$ è l'i-esima riga di A.

5) L'applicazione $\mathcal{A}(x) = Ax$, ove $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $x \in \mathbb{R}^n$ è lineare perché, per la proprietà distributiva del prodotto di matrici (a sinistra), si ha $A(x+y) = Ax + Ay$ e inoltre $A(\lambda x) = \begin{pmatrix} A^1(\lambda x) \\ A^2(\lambda x) \\ A^m(\lambda x) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} A^1 x \\ \vdots \\ A^m x \end{pmatrix} = \lambda A x$ prodotti scalari.

In effetti, è stato provato altrove che le applicazioni $\mathcal{A}(x) = Ax$ sono tutte e sole le applicazioni lineari fra $\mathbb{R}^m$ ed $\mathbb{R}^n$ nel senso che, per ogni $\mathcal{A}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineare, esiste $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ (notare che la dimensione dello spazio di ARRIVO coincide col numero di RIGHE della matrice A) tale che $\mathcal{A}(x) = Ax$ ove, come già fatto altrove, si identifica il vettore $x \in \mathbb{R}^m$ con il vettore colonna in $\mathbb{R}^{m\times 1}$ definito dagli stessi termini.

4) Le operazioni che vengono eseguite sulla matrice dei coefficienti per applicare l'algoritmo di Gauss equivalgono a moltiplicare tale matrice per opportune altre. Per cominciare, è utile considerare lo scambio di righe.

Moltiplichiamo a sinistra A per la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

ottenuta dalla matrice identica per aver scambiato le prime due righe (e colonne!)

$$PA = \begin{pmatrix} e_2 \\ e_1 \\ e_3 \\ \vdots \\ e_m \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} e_2A \\ e_1A \\ e_3A \\ \vdots \\ e_mA \end{pmatrix}$$

righe di P righe di PA

Poiché e_iA è la i-esima riga di A ne segue che il prodotto a sinistra per P ha l'effetto di scambiare la seconda riga e_2A di A, che appare al primo posto nel risultato, con la prima e_1A, che appare per seconda. Analogamente scambiare una coppia di vettori della base canonica e_i e e_j nella matrice identica produce una matrice P, detta di PERMUTAZIONE, che moltiplicata a sinistra di A ne scambia la riga i e la riga j.

Analogo discorso vale per le <u>COLONNE</u>, moltiplicando per la stessa matrice da <u>DESTRA</u>, invece che da sinistra.

Per individuare poi la matrice che moltiplicata per un'altra ne moltiplichi una riga per una costante sommandola poi ad un'altra (l'operazione centrale dell'algoritmo di Gauss) è utile studiare il prodotto per la matrice S seguente,

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} & & j & & \\ & & \downarrow & & \end{matrix} \\ i \to & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

che ha tutti gli elementi nulli salvo quello di riga i e colonna j, che vale α.

Si ha: $$(SA)_{hk} = S_{hp}A_{pk} = \begin{cases} \alpha A_{jk} & \text{se } h=i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e dunque il prodotto da sinistra per S ha l'effetto di moltiplicare per α la riga j-esima di A e "copiarla" al posto della riga i-esima del risultato SA. Ne segue subito che $(I+S)A$ è la matrice ottenuta sommando ad A la matrice SA, e dunque è la matrice ottenuta da A sommando alla riga i il multiplo α della riga j.

Se poi si sceglie $i=j$ si ottiene come effetto complessivo di moltiplicare la riga i per $\alpha+1$.

Dunque tutte le operazioni sulle righe (scambio di righe, prodotto di una riga per una costante o somma ad una riga di un multiplo di un'altra) equivalgono a prodotti per opportune matrici (da sinistra), mentre lo scambio di colonne equivale ad un prodotto da destra per una matrice di permutazione.

In tal senso, l'applicazione dell'algoritmo di Gauss equivale a "fattorizzare" la matrice originale A in un prodotto di matrici di permutazioni o del tipo precedente, e di una matrice $\tilde{A}$ triangolare (o diagonale, nell'algoritmo di Gauss-Jordan). Si capisce perché l'algoritmo di Gauss si chiama anche "algoritmo di fattorizzazione".

5) MATRICI "A BLOCCHI"

Siano $A, A' \in \mathbb{R}^{m\times n}$ con la struttura seguente

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} B' & C' \\ D' & E' \end{pmatrix}$$

ove B e B' (così come C e C', D e D', ed E ed E') sono matrici dello stesso tipo. Le matrici A ed A' sono dette spesso "A BLOCCHI". Si può provare, con noiosi esercizi di pazienza che non verrà praticato qui, che le operazioni "A BLOCCHI" seguono le stesse regole di quelle dei termini scalari e cioè, ad esempio,

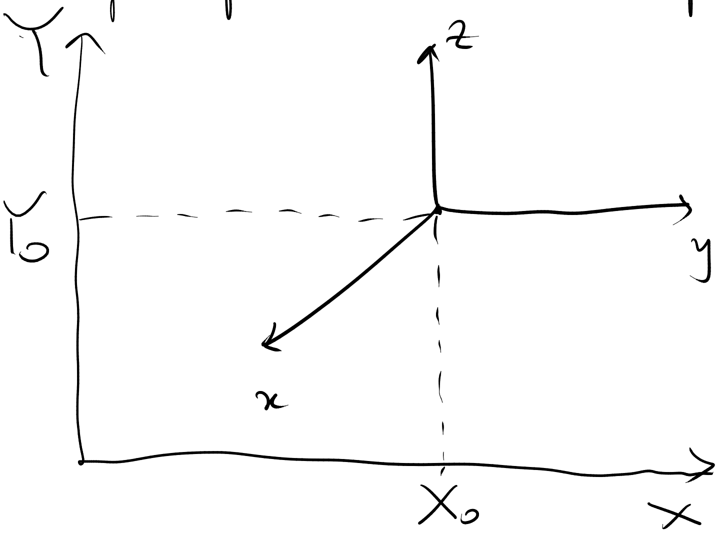
$$A + A' = \begin{pmatrix} B+B' & C+C' \\ D+D' & E+E' \end{pmatrix}$$ (immediato!)

$$AA' = \begin{pmatrix} BB'+CD' & BC'+DE' \\ BD'+DE' & DC'+EE' \end{pmatrix}$$ (meno immediato!)

(Il tutto, naturalmente, se i tipi lo consentono!)

6) Un'ultima curiosità: le proiezioni grafiche.

Poiché $A(x)=Ax$ è lineare, basta definirla su una base per definirla su tutto lo spazio.



La proiezione obliqua di Cavalieri, detta impropriamente "assonometria cavaliera", permette di rappresentare in modo suggestivo oggetti solidi su un piano.

$$A\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X\\ Y\end{pmatrix} \qquad A:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2.$$

Le immagini dei tre vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$ sono

$$A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}X_0\\Y_0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\frac12\\ \frac12\end{pmatrix}$$

(Il valore $\frac12$ è arbitrario; aumentandolo accentua la profondità)

$$A\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}X_0\\Y_0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}X_0\\Y_0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}X_0\\Y_0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\frac12 & 1 & 0\\ -\frac12 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}X_0-\frac12 x+y\\ Y_0-\frac12 x+z\end{pmatrix}$$

Occhio all'orientamento degli assi sui display.

E' un utile esercizio ripetere tale costruzione per le assonometrie "vere". In ogni caso fare molta attenzione: l'origine $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ non viene trasformata nell'origine nel piano "del display" $(0,0)$, ma nel punto (X_0, Y_0) (magari al centro dello schermo!), e dunque A NON è lineare, ma lo diventa sottraendovi (X_0, Y_0). Attenzione pure alla prospettiva, che richiede un trattamento differente.

Interrompiamo qui la rassegna di applicazioni speciali delle matrici, non certo per mancanza di esempi interessanti, ma, purtroppo, perché non c'è modo di presentarli tutti in una dispensa destinata alla preparazione degli esami.