MATRICI (II)

Prima di definire il prodotto fra matrici è comodo introdurre una notazione abbreviata, introdotta da A. Einstein mentre utilizzava la geometria differenziale, il vecchio "Calcolo Differenziale Assoluto", per formulare la sua celebre teoria della Relatività Generale. Fu poi ulteriormente modificata da L. Landau, per semplificarne ancora l'impiego quando non sia necessario distinguere fra indici "controvarianti" e "covarianti".

CONVENZIONE DI EINSTEIN (– LANDAU):

Se un prodotto di quantità dipendenti da indici contiene una coppia di indici uguali, è sottintesa una somma di tutti i prodotti ottenuti facendo variare gli indici in tutti i valori possibili.

E cioè: $u_i v_i \equiv \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$ (prodotto scalare dei vettori di componenti u_i e v_i) oppure $a_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$

NOTA BENE: Usare "per distrazione" due indici uguali mentre si impiega la convenzione di Einstein cambia il significato di quanto si è scritto. Si può ora definire il

PRODOTTO DI MATRICI: Date $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ si definisce $AB \in \mathbb{R}^{m\times p}$ ponendo

$$(AB)_{ij} = A_{ih}B_{hj} \equiv \sum_{h=1}^{n} A_{ih}B_{hj}$$

NOTA: Il numero di **COLONNE** del primo fattore A **DEVE** coincidere con il numero di **RIGHE** del secondo fattore B.

NOTA: Al variare di h fra 1 ed n A_{ih} "percorre" l'i-esima riga di A, mentre B_{hj} descrive la j-esima colonna di B, e dunque $\sum_{h=1}^{n} A_{ih}B_{hj}$ è il prodotto scalare della i-esima riga di A con la j-esima colonna di B.

Per calcolare $(AB)_{ij}$ si moltiplicano l'i-esima riga di A e la j-esima colonna di B.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix}$$

ESEMPI:

1) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ NON è definito perché la prima è 2×3, la seconda è 4×2, e $3 \neq 4$

2) $\underset{A}{\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}} \underset{B}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$ E' definito perché la prima matrice è 1×3 e la seconda è 3×1, ed essendo $3 = 3$ il prodotto definisce una matrice 1×1, il cui termine è il prodotto scalare riga-colonna

$$(AB)_{11} = \underset{a_{11}}{3} \cdot \underset{b_{11}}{0} + \underset{a_{12}}{2} \cdot \underset{b_{21}}{1} + \underset{a_{13}}{1}\underset{b_{31}}{(-1)} = 1$$

e dunque $\quad AB = (1) \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$

3) Calcoliamo ora BA, ove A e B sono le matrici dello esempio precedente. Verifichiamo prima che il prodotto è definito, e determiniamo il tipo: poiché $B \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ e $A \in \mathbb{R}^{1 \times 3}$ e le colonne di B (una) sono tante quante le righe (una) di A, il prodotto è definito e il tipo è 3×3.

$$(BA)_{11} = \text{prima riga di } B \cdot \text{prima colonna di } A =$$

prodotto scalare

$$= 0 \cdot 3 = 0$$

$(BA)_{21}$ = seconda riga di B · prima colonna di A =

$$= 1\cdot 3 = 3 \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Proseguendo, si ottiene

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

4) $$\underset{A}{\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}} \quad \underset{B}{\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 6 & 1 \\ 3 & 7 & 0 \\ 4 & 8 & 1 \end{pmatrix}}$$

$A \in \mathbb{R}^{2\times 4}$, $B \in \mathbb{R}^{4\times 3}$, $AB \in \mathbb{R}^{2\times 3}$

Calcolando i prodotti scalari riga per colonna si ottiene:

$(AB)_{11} = 2\cdot 1 + 4\cdot 2 + 1\cdot 3 + 3\cdot 4$ $\qquad (AB)_{21} = 1\cdot 1 + (-1)2 + 0\cdot 3 + 2\cdot 4$

$(AB)_{12} = 2\cdot 5 + 4\cdot 6 + 1\cdot 7 + 3\cdot 8$ $\qquad (AB)_{22} = 1\cdot 5 + (-1)6 + 0\cdot 7\cdot 2\cdot 8$

$(AB)_{13} = 2\cdot 0 + 4\cdot 1 + 1\cdot 0 + 3\cdot 1$ $\qquad (AB)_{23} = 1\cdot 0 + (-1)1 + 0\cdot 0 + 2\cdot 1$

Osserviamo che BA <u>NON</u> è definito (... $AB \neq BA$!)

5) $$\underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \underset{B}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} =$$

$A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ e $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$AB \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ e $BA \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 1\cdot 1 & 1\cdot 0 + 1\cdot 1 \\ 0\cdot 1 + 1\cdot 1 & 0\cdot 0 + 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$ mentre

$$\underset{B}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot 0 & 1\cdot 1 + 0\cdot 1 \\ 1\cdot 1 + 1\cdot 0 & 1\cdot 1 + 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Se ne deduce che, anche quando siano definiti entrambi, i prodotti AB e BA non è detto che coincidano.

<u>IL PRODOTTO DI MATRICI</u> E' (<u>IN GENERALE</u>) <u>NON COMMUTATIVO</u>.

<u>NOTA</u>: Quanto visto sopra giustifica il nome dato al prodotto: RIGHE PER COLONNE.

<u>NOTA</u>: Le matrici quadrate $\mathbb{R}^{n\times n}$ hanno la notevole proprietà, osservata nel precedente controesempio alla proprietà commutativa, di consentire il loro prodotto in qualunque ordine, e di fornire un risultato dello stesso tipo dei fattori, e cioè $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n} \Rightarrow AB, BA \in \mathbb{R}^{n\times n}$, (anche se probabilmente diversi fra loro).

Ne segue che il prodotto di matrici definisce una legge di prodotto "interno" (risultato nello stesso insieme dei fattori), così come accade per il prodotto di numeri interi relativi, o di numeri razionali o di polinomi. I prossimi risultati assicurano che il prodotto di matrici, almeno sulle matrici quadrate, definisce un'operazione con le stesse proprietà alle quali siamo abituati quando manipoliamo numeri o polinomi: le proprietà di un' <u>ALGEBRA</u>.

<u>TEOREMA</u> (Proprietà associativa): <u>Sia</u> $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ <u>e</u> $C \in \mathbb{R}^{p\times q}$. <u>Allora</u>

$$(AB)C = A(BC)$$

<u>DIM</u>. Infatti AB è eseguibile ed è di tipo $m\times p$, per cui può essere moltiplicato a destra per C ottenendo una matrice $m\times q$. Analogamente BC è di tipo $n\times q$ e si può moltiplicare a sinistra per A ottenendo ancora $m\times q$. I tipi dei due membri coincidono. Inoltre

$$((AB)C)_{ij} = (AB)_{ih}C_{hj} = A_{ik}B_{kh}C_{hj}$$

e (evitare di duplicare indici "a propria insaputa"!)

$$(A(BC))_{ij} = A_{il}(BC)_{lj} = A_{il}B_{lr}C_{rj}$$

Nelle due formule i e j sono fissi e restano quelli indicati a primo membro, mentre h,k, l,r sono ripetuti, e assumono tutti i valori loro consentiti ($k,l=1..n$, $h,r=1..p$) che sono uguali, prima di sommare i prodotti. Le due somme di prodotti sono dunque uguali. $\boxed{///}$

<u>Il prodotto di matrici, purché definito, è associativo, e dunque si può omettere di indicare le parentesi nei prodotti di più matrici.</u>

$$ABC = (AB)C = A(BC)$$

<u>TEOREMA</u> (<u>proprietà distributive</u>): <u>Siano</u> $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ <u>e</u> $C, D \in \mathbb{R}^{n \times p}$. <u>Allora</u>

$$A(C+D) = AC + AD$$

$$(A+B)C = AC + BC$$

<u>DIM</u>.

$$(A(C+D))_{ij} = A_{ih}(C+D)_{hj} = A_{ih}C_{hj} + A_{ih}D_{hj} = (AC)_{ij} + (AD)_{ij}$$

Analogamente può essere provata la distributività del prodotto a destra rispetto alla somma. ▨

In $\mathbb{R}^{n \times n}$ i teoremi precedenti forniscono l'associatività e la distributività del prodotto di matrici. In $\mathbb{R}^{n \times n}$ sono definite tre operazioni: somma e prodotto per uno scalare, rispetto alle quali è uno spazio vettoriale, ed un prodotto (interno) associativo e distributivo rispetto alla somma. A parte $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$, l'esempio più importante di una simile struttura è l'insieme dei polinomi (con la loro somma, il prodotto per un numero, ed il prodotto fra loro); un altro esempio è $\mathbb{R}^3$, con la sua struttura naturale di spazio vettoriale e con il prodotto esterno $u \wedge v$ (che in realtà è "interno", perché il risultato è nello stesso spazio dei fattori), rinunciando però alla proprietà associativa; $\mathbb{R}^4$ ed $\mathbb{R}^8$ hanno delle definizioni di prodotto, la prima associativa ma non commutativa e la seconda solo distributiva, che li rendono algebre (anzi addirittura campi - i "quaternioni" e gli "ottetti" - nei quali ogni elemento non nullo ha un reciproco).

A tale proposito proviamo che

TEOREMA: Detta $I = (\delta_{ij})$ la matrice identica in $\mathbb{R}^{n\times n}$, per ogni $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ si ha:

$$AI = IA = A$$

Dim. $(AI)_{ij} = A_{ih}\delta_{hj} = A_{ij}$ $\quad (IA)_{ij} = \delta_{ih}A_{hj} = A_{ij}$

in quanto $\delta_{hj} = \begin{cases} 1 & \text{se } h=j \\ 0 & \text{se } h\neq j \end{cases}$ e $\delta_{ih} = \begin{cases} 1 & \text{se } h=i \\ 0 & \text{se } h\neq i \end{cases}$

Dunque, la matrice identica ha, tanto a destra quanto a sinistra, la proprietà del numero 1 o del polinomio identicamente 1: lascia inalterato l'altro fattore del prodotto. Un prodotto può commutare!

<u>**DEFINIZIONE**</u>: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ <u>si dice</u> **INVERTIBILE** <u>se</u> $\exists\, X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ <u>tale che</u> $AX = I$.

La necessità di definire un'inversa a sinistra non è poi così importante: verrà provato che se esiste l'inversa destra esiste anche quella sinistra. Inoltre

<u>**LEMMA**</u>: Se $AX = I = YA$ allora $X = Y$

<u>Dim.</u>

$$YAX \begin{cases} = (YA)X = IX = X \\ = Y(AX) = YI = Y \end{cases}$$

e dunque le due inverse, se esistono, coincidono. $\boxed{/\!/}$

Il fatto che se esiste un'inversa esiste anche l'altra è una conseguenza non banale della teoria della dimensione, ed è stato provato in un altro contributo.