MATRICI

Lo scopo di queste note è di presentare in breve come si definiscano le operazioni sulle matrici, le loro proprietà, e i vantaggi che si possono conseguire utilizzando tale notazione abbreviata: in effetti, il calcolo matriciale consente ciò che, in alcuni linguaggi di programmazione più recenti, si chiama overloading dei simboli di operazioni elementari come somma e prodotto, attribuendo ad essi un diverso significato quando si manipolano matrici, ma in modo da conservare una gran parte delle proprietà che consentono di effettuare calcoli algebrici. Ci sono la distributività (così importante da essere la base di altri due concetti molto celebri: il "mettere in evidenza" e la linearità), l'associatività, lo zero, l'opposto, l'unità, l'inverso ("il reciproco"). C'è un caduto illustre: la proprietà commutativa! Tanto vale dirlo subito: in generale, per il prodotto di matrici $AB \neq BA$ e dunque $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$. Occorre dunque una certa cautela nell'esportare proprietà dei numeri alle matrici: non tutto è direttamente estendibile!

DEFINIZIONE : Una MATRICE $m\times n$, a m righe ed n colonne, a termini razionali, reali o complessi, è una funzione $A:\{1,..,m\}\times\{1,..,n\}\to\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$, o $\mathbb{C}$. Si usano i simboli $\mathbb{Q}^{m\times n}$, $\mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbb{C}^{m\times n}$ per denotare l'insieme delle matrici $m\times n$ a termini rispettivamente razionali, reali o complessi.

La notazione tradizionale per le matrici giustifica i termini "righe" e "colonne" impiegati, e impiega gli indici, come per le successioni:

$$A=(a_{ij})_{\substack{i=1..m\\ j=1..n}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

L'indice i (il primo) definisce la riga (orizzontale) di appartenenza e l'indice j (il secondo) la colonna (verticale). Nella stragrande maggioranza dei casi, una volta fissate le "dimensioni" m ed n della matrice si omette di precisare tutte le volte l'intervallo di appartenenza degli indici i e j; è anche consolidata la tradizione di denotare con le maiuscola la matrice stessa, mentre si adoperano di regola le minuscole per indicare i singoli termini della matrice, con gli indici ad essi relativi. Per maggior chiarezza, per le definizioni che seguono useremo sempre la maiuscola mentre, in seguito, aderiremo alla consuetudine corrente, anche se meno logica!

ESEMPI: Se $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $A = (a_{ij})$, l'elemento a_{21} è l'elemento della 2ª riga sulla 1ª colonna; l'elemento a_{43} è l'elemento della 4ª riga sulla 3ª colonna.

Nel seguito, faremo riferimento solo alle matrici reali, restando inteso che definizioni e proprietà si estendono a $\mathbb{Q}^{m\times n}$ e $\mathbb{C}^{m\times n}$

DEFINIZIONE: Date due matrici $A = (A_{ij})$ e $B = (B_{ij})$, DELLO STESSO TIPO $m \times n$, si definisce la loro somma $A + B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ come la matrice i cui termini sono:

$$(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$$

La definizione è identica a quella della somma di vettori.

Allo stesso modo si definisce il prodotto per uno scalare, lo zero e l'opposto d'una matrice

DEFINIZIONE: Data $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ed uno scalare $\alpha \in \mathbb{R}$ si definisce il prodotto $\alpha A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ponendo

$$(\alpha A)_{ij} = \alpha A_{ij} \qquad \begin{matrix} i = 1..m \\ j = 1..n \end{matrix}$$

DEFINIZIONE: La matrice nulla, 0, è definita da

$$(0)_{ij} = 0 \qquad \begin{matrix} i = 1..m \\ j = 1..n \end{matrix}$$

mentre l'opposto $-A$ d'una matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ è definita ponendo

$$(-A)_{ij} = -A_{ij} \qquad \begin{matrix} i = 1..m \\ j = 1..n \end{matrix}$$

ESEMPI:

$$2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 & 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 4 & 2 \cdot 5 & 2 \cdot 6 \\ 2 \cdot 7 & 2 \cdot 8 & 2 \cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{pmatrix}$$

In $\mathbb{R}^{2 \times 2}$, $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; in $\mathbb{R}^{4 \times 2}$ $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad -A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -4 & -5 & -6 \end{pmatrix}$$

Il seguente teorema chiarisce come i concetti appena introdotti godano delle stesse proprietà dei loro analoghi per i numeri e per i polinomi.

<u>TEOREMA</u>: La somma di matrici gode delle proprietà

1) COMMUTATIVA $\quad A+B = B+A$

2) ASSOCIATIVA $\quad (A+B)+C = A+(B+C)$

3) 0 E' NEUTRO $\quad 0+A = A+0 = A$

4) $-A$ E' L'OPPOSTO $\quad A+(-A) = 0$

e, assieme al prodotto per uno scalare gode delle proprietà

5) "DISTRIBUTIVA" $\quad \alpha A + \beta A = (\alpha+\beta) A$

$\alpha A + \alpha B = \alpha (A+B)$

6) "ASSOCIATIVA" $\quad \alpha(\beta A) = (\alpha\beta) A$

7) $\quad 1 \cdot A = A$

Osserviamo, prima di dare un saggio di dimostrazione, che in conseguenza di tali proprietà, $\mathbb{R}^{m\times n}$ (e così $\mathbb{Q}^{m\times n}$ o $\mathbb{C}^{m\times n}$), sono spazi vettoriali rispetto alla somma ed al prodotto per uno scalare appropriato, appena definiti.

<u>**DIM**</u>. Verrà dato solo un esempio, per mostrare come basti semplicemente riscrivere le identità da dimostrare per i termini delle matrici coinvolte ed impiegare le proprietà corrispondenti dei numeri.

$(\alpha A + \alpha B)_{ij} =$ (definizione di somma di matrici)

$= (\alpha A)_{ij} + (\alpha B)_{ij} =$ (definizione di prodotto per uno scalare)

$= \alpha A_{ij} + \alpha B_{ij} =$ (proprietà distributiva per i numeri)

$= \alpha (A_{ij} + B_{ij}) =$ (definizione di somma di matrici)

$= \alpha (A+B)_{ij} =$ (prodotto per uno scalare)

$= (\alpha(A+B))_{ij}$

e dunque il termine generale di posto i,j della matrice $\alpha A + \alpha B$ coincide con quello della matrice $\alpha(A+B)$.

Allo stesso modo si dimostrano tutte le altre proprietà.

$\blacksquare$

NOTA: Le virgolette nelle proprietà associative e distributive sono motivate dal fatto che l'operazione di prodotto utilizzata non è "interna", e così non moltiplica due matrici per ottenerne una dello stesso tipo, ma moltiplica numeri per matrici. A breve verrà definito un prodotto di questo tipo con proprietà distributiva e associativa propriamente dette.

NOTA: Una matrice $m \times n$ ha $m \times n$ termini, e potrà dunque essere pensata come un elemento di $\mathbb{R}^{mn}$, coerentemente alla notazione $(m \times n = mn)$. E' però estremamente fuorviante considerare matrici e vettori come concetti identici, anche quando ciò sarebbe giustificato, come nel caso dei "vettori riga" e "vettori colonna", a causa della definizione di prodotto alla quale si farà riferimento poco più su.

DEFINIZIONE:

1) Una matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$, con ugual numero di righe e di colonne, viene detta QUADRATA.

2) Una matrice quadrata $(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ viene detta

DIAGONALE se $a_{ij} = 0$ per $i \neq j$

3) Una matrice quadrata $(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ viene detta TRIANGOLARE (SUPERIORE) se $a_{ij} = 0$ se $i > j$.

4) Una matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times 1}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$, viene detta VETTORE COLONNA.

5) Una matrice $A \in \mathbb{R}^{1 \times m}$, $A = (a_{11} \; a_{12} \; \cdots \; a_{1m})$, è detta VETTORE RIGA.

6) La matrice $(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ con $a_{ij} = 1$ se $i = j$ e $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$ viene detta MATRICE IDENTICA (in $\mathbb{R}^{m \times m}$). Talvolta si scrive

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \qquad \text{"}\delta \text{ di KRONECKER"}$$

e la matrice (δ_{ij}) è dunque la matrice identica.

7) Una matrice $\mathbb{R}^{k \times k}$ ottenuta sopprimendo da una matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $n-k$ righe ed $n-k$ colonne viene detta MINORE (estratto) da A.

I minori PRINCIPALI sono quelli nei quali vengono soppresse righe e colonne dello stesso indice.

Esempi:

$\begin{pmatrix}2&2\\1&0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times2}$ $\begin{pmatrix}2&4&1&0\\1&0&-1&2\\-3&-3&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{4\times4}$ sono quadrate.

$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ sono diagonali (i termini fuori della diagonale a_{ij} sono nulli)

$\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&1\\0&0&2\end{pmatrix}$ sono triangolari: i termini "sotto" la diagonale sono nulli.

$\begin{pmatrix}1&1&1&2\\1&0&0&3\\0&0&1&4\\0&0&0&3\end{pmatrix}$ non è triangolare, perché $a_{21}=1\neq0$ mentre $2>1$: ci sono termini "sotto" la diagonale non nulli.

$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$ sono vettori colonna.

$(1,1,2)$ e $(7,5,\pi,e)$ sono vettori riga

$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ sono le matrici identiche in $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, rispettivamente.

$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ non è identica: $a_{11}=0$ mentre dovrebbe essere $a_{ii}=1\ \forall i$

Se $e_1 \dots e_i \dots e_n$ sono i vettori della base canonica in $\mathbb{R}^n$, o di un qualunque sistema ORTONORMALE, risulta

$$e_i e_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i\neq j \end{cases}$$

Infine

$\begin{pmatrix}1&2\\4&5\end{pmatrix}$ è un minore estratto da $\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$,

sopprimendone la terza riga e la terza colonna: avendo indici uguali il minore è principale. Invece,

$\begin{pmatrix}1&3\\4&6\end{pmatrix}$ è un minore non principale estratto dalla stessa matrice, sopprimendo la 3ª riga e la 2ª colonna.