LA MATRICE INVERSA

Si può definire l'applicazione inversa di una data se essa è iniettiva e suriettiva, e cioè se $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è tale che l'equazione $A(x) = y$ ha una e una sola soluzione per ogni $y \in \mathbb{R}^m$.

Il risultato seguente, conseguenza diretta del teorema di Grassmann, fornisce una importante condizione per l'invertibilità

TEOREMA: Se $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è invertibile, allora $n = m$.

Dim. Infatti, se A è iniettiva allora $\operatorname{Ker} A = \{0\}$ e dunque, per il teorema di Grassmann $\dim(\mathbb{R}^n) = \dim A(\mathbb{R}^n)$. Essendo poi A anche suriettiva, dalla definizione ne segue che $A(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^m$ e dunque $n = \dim A(\mathbb{R}^n) = \dim \mathbb{R}^m$, da cui la tesi. $\boxed{//}$

In tutto il resto di queste note, dunque, supponiamo A da $\mathbb{R}^n$ in sé. Fissando come base di partenza e d'arrivo la base canonica, ne segue che la matrice associata A, che verifica $A(x) = \sum_{\substack{j=1..n \\ i=1..m}} A_{ij} x_j e_i$ con $n = m$ ed $e_1 \dots e_n$ base canonica in $\mathbb{R}^n$, è una matrice quadrata in $\mathbb{R}^{n \times n}$.

NOTA: Data una matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e dette $A_1 \dots A_n$ le sue colonne e $A^1 \dots A^n$ le righe, si osserva subito che il sistema lineare (in forma scalare)

$$\begin{cases} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \dots + A_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ A_{n1}x_1 + A_{n2}x_2 + \dots + A_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

può scriversi anche (in forma vettoriale)

$$x_1 \begin{pmatrix} A_{11} \\ \\ A_{n1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} A_{12} \\ \vdots \\ A_{n2} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} A_{1n} \\ \\ A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

e cioè

$$\boxed{x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n = b \equiv \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}$$

ovvero, adoperando le righe, nell'altra forma (identica per le operazioni da compiere)

$$\boxed{\begin{cases} A^1 x = b_1 \\ A^2 x = b_2 \\ \vdots \\ A^n x = b_n \end{cases} \qquad x = (x_1, \dots, x_n)}$$

oltre che nella forma matriciale compatta

$$\boxed{Ax = b}$$

Per ogni matrice A definiamo una funzione lineare $A(x) = Ax$ e viceversa.

PROBLEMA DELL'INVERSA (DESTRA):

DATA $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ESISTE $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ TALE CHE $AX = I$?

Utilizzando il prodotto a blocchi, dette $X_1 \cdots X_n$ le colonne di X e con $e_1 \cdots e_n$ le colonne della matrice identica I, costituite dai vettori della base canonica, il problema posto diventa

$$A(X_1\ X_2 \cdots X_n) = (e_1 \cdots e_n)$$

$$\parallel$$

$$(AX_1\ \ AX_2 \cdots AX_n)$$

da cui, infine, si può concludere che esiste un'inversa destra X se gli n sistemi lineari

$$AX_i = e_i \qquad i = 1 \ldots n$$

hanno tutti soluzione.
Ricordando che $AX_i = \mathcal{A}(X_i)$ ne segue che se i sistemi precedenti hanno tutti soluzione, allora $e_1 \ldots e_n$ appartengono tutti all'immagine di $\mathcal{A}$ che, essendo un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ che contiene tutti i vettori della base canonica, coincide con $\mathbb{R}^n$ stesso, da cui $\mathcal{A}$ è suriettiva.

Per il teorema di Cramer, poiché le dimensioni di partenza e di arrivo sono uguali, $\mathcal{A}$ è suriettiva se e solo se è iniettiva e dunque $\ker \mathcal{A} = \{0\}$, e cioè il sistema

$$0 = \mathcal{A}(x) = Ax = x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n$$

ha solo la soluzione $x = 0$, e dunque le colonne della matrice A sono indipendenti.

La dimostrazione può essere percorsa all'incontrario e concludendo

TEOREMA: <u>Condizione necessaria e sufficiente affinché la matrice A sia invertibile è che le sue colonne siano indipendenti e cioè, essendo esse n, siano una base in $\mathbb{R}^n$.</u>

Poiché il prodotto di matrici NON è, in generale, commutativo, la risolubilità di $AX = I$ non implica di per sé quella di $YA = I$ (esistenza dell'inversa sinistra).

Un primo aiuto viene dal seguente

LEMMA: <u>Se A è dotata di inversa destra e sinistra, allora esse coincidono.</u>

<u>Dim</u>. Siano X e Y tali che $YA = AX = I$.

Dall'associatività del prodotto, segue

$$X = IX = (YA)X = Y(AX) = YI = Y$$

$\boxed{///}$

Il problema rimasto aperto è quindi di provare che l'esistenza di una delle inverse implica l'esistenza dell'altra.
Ciò è una conseguenza non del tutto immediata dei risultati seguenti:

LEMMA: Siano $a_1, a_2, \dots, a_n \in X$, X spazio euclideo di dimensione $n > 0$. Allora il sistema

$$a_1 x = 0 \; ; \; a_2 x = 0 \; ; \; \dots \; ; \; a_n x = 0$$

ha solo la soluzione $x = 0$ se e solo se $a_1 \dots a_n$ sono indipendenti.

Dim.

Per ogni $u \in X$, dal teorema della proiezione, segue che $w = u - u_{\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle}$ è ortogonale a tutti i vettori $a_1, a_2, \dots a_n$, e dunque w è una soluzione del sistema precedente. Se si sa che l'unica soluzione del sistema è 0 segue che

$$u = u_{\langle a_1 \dots a_n \rangle} \in \langle a_1 \dots a_n \rangle$$

e dunque $a_1 \dots a_n$ è un sistema di n generatori per X, che è di dimensione n, ed è dunque una base, e $a_1 \dots a_n$ sono di conseguenza indipendenti. Viceversa se $a_1 \dots a_n$ sono n vettori indipendenti in X con $\dim X = n$, ne segue che sono una base; dunque sia $x \in X$ tale che $a_1 x = a_2 x = \dots = a_n x = 0$, e siano $x_1, \dots, x_n$ le coordinate di x rispetto ad $a_1, a_2, \dots, a_n$. Da $x_i a_i x = x_i \cdot 0 = 0$, sommando membro a membro tutte le equazioni segue $0 = \sum_1^n x_i a_i x = \left(\sum_1^n x_i a_i\right) x = x \cdot x = |x|^2$ e dunque ogni soluzione del sistema precedente è nulla. ▨

Possiamo ora dimostrare il risultato principale

TEOREMA: Condizione necessaria e sufficiente perché le righe di una matrice quadrata siano indipendenti è che lo siano le colonne.

Dim.

C.S. Se le colonne sono indipendenti il sistema

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n = 0 \qquad (*)$$

ha solo la soluzione $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. Scrivendo il sistema usando le righe si ottiene che il sistema

$$\begin{cases} x A^1 = 0 \\ x A^2 = 0 \\ \vdots \\ x A^n = 0 \end{cases} \qquad (**)$$

identico al precedente, ha solo la soluzione

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

e dunque per il lemma precedente, i vettori

$$A^1, A^2, \dots, A^n$$

sono indipendenti.

C.N. Se le righe sono indipendenti, per il lemma precedente il sistema $(**)$ (che è identico a $(*)$) ha solo la soluzione $x=0$, da cui le colonne $A_1 \dots A_n$ sono indipendenti. $\square$

Per provare l'esistenza dell'inversa sinistra, e cioè della soluzione Y dell'equazione $YA = I$, consideriamo la trasposta

$$(YA)^* = I^*$$

Poiché $(YA)^* = A^* Y^*$ e $I^* = I$ ne segue che occorre provare che esiste Y tale che $A^* Y^* = I$. Si consideri

$$A^* Z = I$$

Essa ha soluzione se e solo se le colonne di A^*, e cioè le righe di A, sono indipendenti il che è garantito dal teorema precedente se si fa l'ipotesi che le colonne di A siano indipendenti.

Dunque $A^* Z = I$ ha soluzione e dunque, poiché $(B^*)^* = B$, ne segue che $Y = Z^*$ è la soluzione richiesta. $\boxed{/\!/}$

<u>Concludendo</u>: se le colonne (o le righe) di A sono indipendenti A è invertibile a destra e a sinistra con inverse uguali.

<u>DEFINIZIONE</u> $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ <u>si dirà REGOLARE se le colonne sono indipendenti e SINGOLARE altrimenti.</u>

Una curiosità: se A è regolare, il sistema lineare $Ax=b$ ha una formula risolutiva non dissimile da quella delle equazioni di primo grado. Infatti

$$A(A^{-1}b) = (AA^{-1})b = Ib = b$$

e dunque una soluzione è il vettore $A^{-1}b$. Poiché la matrice è regolare, le colonne sono indipendenti e dunque la soluzione di $Ax=b$ è unica. Dunque l'unica soluzione di $Ax=b$ è $x = A^{-1}b$.

La determinazione dell'inversa in pratica è abbastanza facile: basta applicare l'algoritmo di Gauss-Jordan al sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & & 1 \end{array}\right)$$

operando in modo da trasformare il primo membro nella matrice identica, l'inversa apparirà al secondo membro.