LA MATRICE ASSOCIATA ALLE APPLICAZIONI LINEARI FRA SPAZI DI DIMENSIONE FINITA.

INTRODUZIONE

Nelle pagine che seguono viene introdotta la matrice associata ad ogni applicazione fra spazi di dimensione finita e ad un'arbitraria scelta di due basi, una nel dominio ed una nel codominio, assieme ad una sua fondamentale proprietà riguardante il prodotto di composizione: la matrice associata al prodotto di due applicazioni è proprio la matrice prodotto delle matrici associate ai fattori, fissate tre basi negli spazi coinvolti.

LA MATRICE ASSOCIATA

Sia $A : X \to Y$, con A lineare e X e Y di dimensione finita. Siano poi $e_1 \dots e_m$ una base di X e $f_1 \dots f_n$ una base di Y. Si ha, per ogni punto $x \in X$,

$$A(x) = A\left(\sum_{j=1}^{m} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{m} x_j A(e_j)$$

ove $x_1 \dots x_m$ sono le coordinate di x rispetto alla base $e_1 \dots e_m$. Siano ora a_{ij}, $i = 1 \dots n$ le coordinate del vettore $A(e_j)$ rispetto alla base $f_1 \dots f_n$. Ne segue che

$$A(x) = \sum_{j=1}^{m} x_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j\right) f_i$$

La matrice (a_{ij}), avente come colonna j-esima le coordinate del vettore $A(e_j)$ rispetto alla base $f_1 \dots f_n$ verrà detta **MATRICE ASSOCIATA ALL'APPLICAZIONE A e alle basi $e_1 \dots e_m$ di X e $f_1 \dots f_n$ di Y.**

Osserviamo che la coordinata i-esima di $A(x)$ rispetto a $f_1 \dots f_n$ si ottiene calcolando $\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j$, ossia applicando la matrice (a_{ij}) al vettore delle coordinate $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ di x

rispetto alla base $e_1 \dots e_m$. In definitiva, la matrice (a_{ij}) associata ad A verifica

$$\boxed{A(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \right) f_i}$$

ove

$$\boxed{x = \sum_{j=1}^{m} x_j e_j}$$

Cambiare la base $e_1 \dots e_m$ fa cambiare sia i vettori $A(e_j)$, sia le coordinate x_j associate ad ogni vettore x. Cambiare la base $f_1 \dots f_n$ non cambia le coordinate x_j ma farà cambiare le coordinate dei vettori $A(e_1) \dots A(e_m)$ rispetto alla base "d'arrivo" $f_1 \dots f_n$.

Dunque la matrice associata è strettamente legata, oltre che all'applicazione A, anche alla scelta delle basi "di partenza" e "d'arrivo".

<u>OSSERVAZIONE</u>: notiamo che

$$A(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i$$

MATRICE ASSOCIATA AL PRODOTTO DI DUE APPLICAZIONI LINEARI

Siano X, Y, Z tre spazi di dimensione finita e siano $e_1 \dots e_m$, $f_1 \dots f_n$, $g_1 \dots g_p$ delle basi di X, Y, Z, rispettivamente. Siano infine

$$\mathcal{A} : X \to Y \quad \text{e} \quad \mathcal{B} : Y \to Z$$

due applicazioni lineari aventi matrici associate alle basi precedenti (a_{ij}) e (b_{hk}), verificanti dunque

$$\mathcal{A}(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \right) f_i$$

e

$$\mathcal{B}(y) = \sum_{h=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{n} b_{hk} y_k \right) g_h$$

ove x_j, $j = 1..m$, e y_k, $k = 1..n$ sono le coordinate di $x \in X$ e $y \in Y$ per le relative basi.

Verrà allora provata la

<u>PROPOSIZIONE</u> <u>Detta</u> $A = (a_{ij})$ <u>e</u> $B = (b_{hk})$, <u>e</u> <u>definito</u>

$$\mathcal{C}(x) = \mathcal{B}(\mathcal{A}(x))$$

<u>allora</u>

la matrice associata a $\mathcal{C}$ e alle basi $e_1 \dots e_m$ e $g_1 \dots g_p$ è la matrice

$$C = BA$$

DIM.

Consideriamo i vettori $\mathcal{C}(e_1) \dots \mathcal{C}(e_m)$, di quali dobbiamo essere determinate le coordinate rispetto a $g_1 \dots g_p$ – ossia le colonne della matrice associata – per i quali vale, tenendo conto dell'osservazione della sezione precedente,

$$\mathcal{C}(e_k) = \mathcal{B}(\mathcal{A}(e_k)) = \mathcal{B}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ik} f_i\right) =$$

$$= \mathcal{B}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ik} f_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} \mathcal{B}(f_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ik} \sum_{h=1}^{p} b_{hi} g_h = \sum_{h=1}^{p} \left(\sum_{i=1}^{n} b_{hi} a_{ik}\right) g_h$$

Allora la coordinata relativa a g_h di $\mathcal{C}(e_k)$ è $\sum_{i=1}^{n} b_{hi} a_{ik}$, che è per definizione l'elemento di riga h e colonna k della matrice associata a $\mathcal{C}$, e che è esattamente l'elemento corrispondente della matrice prodotto BA. $\blacksquare$

UN ESEMPIO

Sia $X = Y = \{ ax^2 + bx + c \, : \, a, b, c \in \mathbb{R} \}$ e sia

$$D : X \to Y$$

la derivata, che muta un qualunque polinomio di grado minore o eguale a 2 in uno di grado minore o eguale ad 1, che è un sottospazio Y di X.

Introduciamo su X la base $1, t, t^2$ e su Y $(1, t)$. Si ha

$$\left.\begin{array}{ll} D(1) = 0 = \underline{0} \cdot 1 + \underline{0} \cdot t & \text{coordinate } (0,0) \\ D(t) = 1 = \underline{1} \cdot 1 + \underline{0} \cdot t & \text{coordinate } (1,0) \\ D(t^2) = 2t = \underline{0} \cdot 1 + \underline{2} \cdot t & \text{coordinate } (0,2) \end{array}\right\} \begin{array}{c} \underline{\text{RISPETTO}} \\ \underline{\text{A}} \\ 1, t \end{array}$$

Da cui la matrice associata a D e alle basi $(1, t, t^2)$ di X e $(1, t)$ di Y è

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

coordinate di $D(1)$...

coordinate di $D(t)$...

coordinate di $D(t^2)$...

tutte rispetto a $(1, t)$

Sia invece $(2, 2t-1, t^2-t)$ la base "di partenza" in X e sia $(1, t+1, t^2-1)$ quella "d'arrivo" in $Y \subseteq X$. In tal caso

$$D(2) = 0 = 0\cdot 1 + 0\cdot(t+1) + 0(t^2-1)$$

$$D(2t-1) = 2 = 2\cdot 1 + 0(t+1) + 0(t^2-1)$$

$$D(t^2-t) = 2t-1 = (-3)\cdot 1 + 2\cdot(t+1) + 0(t^2-1)$$

da cui la matrice associata a $D: X \to X$, rispetto alle due basi diverse su X, scelte per dominio e codominio, diventa

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

NOTA FINALE

La scelta di basi in uno spazio di dimensione finita consente di "identificarlo" con lo spazio euclideo $\mathbb{R}^n$ di uguale dimensione. Analogamente un'applicazione fra spazi di dimensione finita è completamente individuata dalla matrice che trasforma le coordinate di ogni punto nel dominio in quelle della sua immagine nel codominio, ed il prodotto di composizione di applicazioni lineari corrisponde al prodotto delle matrici associate. Purtroppo tutto ciò si perde, per la massima parte, se si passa a dimensione infinita.