L'INTEGRALE DI LEBESGUE

Placido Longo

La definizione qui presentata, nelle fasi iniziali, segue da vicino quella di Riemann per le funzioni di una variabile, che è bene aver in mente: basta sostituire agli intervalli i misurabili. Presuppone la conoscenza di cosa siano un insieme misurabile secondo Lebesgue (pronuncia: lebèg) e la sua misura. Gli integrali "impropri", sia al finito sia all'infinito, sono invece sostanzialmente differenti dall'integrale di Lebesgue, almeno per quanto riguarda le funzioni integrabili, ma non assolutamente integrabili. Per l'integrale di Lebesgue, integrabilità e assoluta integrabilità coincidono.

Funzioni limitate

Inizialmente si definisce l'integrale per le funzioni limitate.
Sia $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione reale su E, insieme misurabile di misura finita. Sia $\pi = \{E_1, E_2, ..., E_n\}$ una *partizione misurabile di* E, ossia una famiglia finita di sottinsiemi *misurabili* (secondo Lebesgue) di E verificante:

$$\bigcup_{i=1..n} E_i \;=\; E$$

$$i \neq j \quad \Rightarrow \quad E_i \bigcap E_j \;=\; \emptyset$$

Per ogni fissata partizione π, si definiscono la *somma inferiore* σ_π e la *somma superiore* Σ_π ponendo

$$\sigma_\pi \;=\; \sum_1^n m(E_i) \inf_{E_i} f$$

e

$$\Sigma_\pi \;=\; \sum_1^n m(E_i) \sup_{E_i} f$$

ove m denota la misura di Lebesgue, che sono ben definite perché, essendo f limitata, tutti gli estremi superiori e inferiori sono finiti, e tali sono pure le misure degli insiemi E_i, che sono sottinsiemi di E, di misura finita. Si definiscono poi *l'integrale inferiore* $\underline{\int}_E f$ e *l'integrale superiore* $\overline{\int}_E f$ ponendo

$$\underline{\int}_E f \;\equiv\; \sup_\pi \sigma_\pi$$

e

$$\overline{\int}_E f \;\equiv\; \inf_\pi \Sigma_\pi$$

al variare di π nell'insieme di tutte le partizioni misurabili.

Definizione 1 *Si dice che f è integrabile secondo Lebesgue se e solo se gli integrali superiore e inferiore su E coincidono. Il loro comune valore è detto integrale di Lebesgue di f su E.*

Le funzioni positive su insiemi di misura finita

Sia ora f una funzione positiva, non necessariamente limitata. Per definirne l'integrale poniamo, per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n(x) \;=\; \min(f, n)$$

La funzione f_n coincide con f sui punti dove $f \leq n$, mentre è uguale ad n nei punti sui quali f supera n; in sostanza, passare da f a f_n equivale a troncare la f ad altezza n. È immediato verificare che, per ogni $x \in E$, f è compresa fra 0 e n ed inoltre $f_n(x)$ cresce al crescere di n, per ogni x. Si pone allora

$$\int_E f \;\equiv\; \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_E f_n$$

ove gli integrali di f_n sono ben definiti perché sono funzioni limitate.
La f si dirà integrabile su E se l'estremo superiore precedente è finito.

Le funzioni positive su insiemi misurabili arbitrari

Dato un qualunque insieme misurabile E poniamo $E_n = E \cap B(0,n)$, ottenuto intersecando E con la sfera di centro l'origine e raggio n. Ogni E_n ha misura finita, minore o eguale a quella della sfera. Si pone, per ogni funzione positiva,

$$\int_E f \;\equiv\; \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{E_n} f$$

dove gli integrali a secondo membro sono relativi ad insiemi di misura finita e quindi già definiti in precedenza.
Come prima, f si dirà integrabile se e solo se il secondo membro precedente è finito.

Le funzioni arbitrarie su insiemi arbitrari

Data una qualunque funzione f si pone:

$$f^+(x) \;=\; \max(f(x), 0) \qquad f^-(x) \;=\; \max(0, -f(x))$$

Le funzioni così definite sono dette la *parte positiva e negativa di f*. Sono entrambe funzioni positive, per le quali l'integrale è già stato definito più su. Esse verificano

$$f(x) \;=\; f^+(x) - f^-(x) \qquad |f(x)| \;=\; f^+(x) + f^-(x)$$

e

$$f^+(x) \;=\; \frac{1}{2}\,[\,|f(x)| + f(x)\,] \qquad f^-(x) \;=\; \frac{1}{2}\,[\,|f(x)| - f(x)\,]$$

Si pone allora

$$\int_E f \;\equiv\; \int_E f^+ \;-\; \int_E f^-$$

ed f sarà detta integrabile se e solo se lo sono (separatamente) la sua parte positiva e la sua parte negativa.
Una conseguenza delle relazioni precedenti e delle proprietà degli integrali, qui non presentate, è che f è integrabile se e solo se lo è anche $|f|$.