APPLICAZIONI LINEARI INVERTIBILI E LORO INVERSE.

In questo contributo studieremo le applicazioni invertibili ed il loro rapporto con le applicazioni biiettive, oltre ad esaminare da vicino il caso delle applicazioni fra spazi euclidei $\mathbb{R}^n$, nei quali ogni risposta può essere ottenuta mediante l'algoritmo di Gauss, (leggermente) modificato da Camille JORDAN (pronuncia: GIORDÀN).

Iniziamo con la

DEFINIZIONE Sia $A: X \to Y$.
Allora A sarà detta **INVERTIBILE** se esiste $A^{-1}: Y \to X$, detta **INVERSA**, tale che

$$A^{-1}(A(x)) = x \quad \forall x \in X$$

e

$$A(A^{-1}(y)) = y \quad \forall y \in Y$$

Osserviamo esplicitamente che non si richiede ad A^{-1}, e neppure ad A, di essere lineari.

Il risultato centrale di questo contributo è il seguente

TEOREMA: $A: X \to Y$ è invertibile se e solo se è biiettiva.

DIM. A invertibile $\Rightarrow$ A è iniettiva e suriettiva

$\boxed{A \text{ è iniettiva}}$ perché se $A(x) = y = A(x')$, applicando A^{-1} si ha $A^{-1}(A(x)) = A^{-1}(y) = A^{-1}(A(x'))$ e, dalla definizione

$x = A^{-1}(y) = x'$

$\boxed{A \text{ è suriettiva}}$ perché, dalla definizione, $A(A^{-1}(y)) = y$ $\forall y \in Y$, e dunque ogni $y \in Y$ è immagine di $A^{-1}(y)$.

A iniettiva e suriettiva $\Rightarrow$ A invertibile

Infatti, fissato ad arbitrio $y \in Y$, si ha che l'equazione $A(x) = y$ ha almeno una soluzione perché A è suriettiva, ma tale soluzione è unica, perché A è iniettiva:

$$A(x) = y = A(x') \Rightarrow x = x'$$

Definiamo allora $A^{-1}(y)$ come l'unica soluzione x di $A(x) = y$. Ne segue subito che

$$A(\underbrace{A^{-1}(y)}_{x}) = y$$

Inoltre, $A^{-1}(A(x))$ è l'<u>unico</u> punto di X sul quale A vale $A(x)$, e tale punto è x. Ne segue

$$A^{-1}(A(x)) = x$$

e dunque A è invertibile. $\blacksquare$

Si vede bene che la linearità non gioca alcun ruolo nella prova di questo risultato generale. È però interessante introdurre tale ipotesi, in quanto consente di ottenere risultati più stringenti e di notevole interesse, come quello sull'uguaglianza delle dimensioni di dominio e codominio.
Innanzitutto sarà utile il seguente

TEOREMA: <u>Sia</u> $A : X \to Y$ <u>lineare e invertibile. Allora l'inversa</u> $A^{-1} : Y \to X$ <u>è lineare.</u>

<u>DIM</u>. Siano $y_1, y_2 \in Y$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ (oppure $\mathbb{C}$, se lo spazio è complesso). Posto $x_1 = A^{-1}(y_1)$ e $x_2 = A^{-1}(y_2)$ si ha, applicando A, $A(x_1) = y_1$, $A(x_2) = y_2$ e, dall'ipotesi di linearità di A, anche

$$A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2) = y_1 + y_2$$

Dunque, x_1+x_2 è la soluzione (unica perché A è invertibile) dell'equazione $A(w)=y_1+y_2$, e quindi

$$\boxed{A^{-1}(y_1+y_2) = x_1+x_2 = A^{-1}(y_1)+A^{-1}(y_2)}$$

Analogamente, $A(\lambda x_1) = \lambda A(x_1) = \lambda y_1$, da cui

$$\boxed{A^{-1}(\lambda y_1) = \lambda x_1 = \lambda A^{-1}(y_1)}$$

▨

NOTA: segue immediatamente dalla definizione che, se A è invertibile, anche A^{-1} lo è, con inversa A. Dal risultato precedente segue anche che A^{-1} è lineare.

▨

La linearità dell'inversa consente, mediante il teorema di Cramer, di ottenere condizioni restrittive sulla struttura delle applicazioni invertibili, metodi efficienti per studiare l'invertibilità e, almeno negli spazi $\mathbb{R}^n$, per determinare l'inversa abbastanza agevolmente.

TEOREMA: Sia $A: X \to Y$ lineare invertibile, con $\dim X, \dim Y < \infty$. Allora

$$\boxed{\dim X = \dim Y}$$

DIM. Poiché A è iniettiva si ha $\dim X = \dim A(X)$ (Grassmann) e, poiché $A(X)$ è un sottospazio di Y, ne segue che $\dim X \leq \dim Y$. Applicando lo stesso ragionamento ad A^{-1}, lineare invertibile da Y ad X per il teorema precedente, segue $\dim Y \leq \dim X$, da cui la tesi

$\blacksquare$

Dunque, tutte le applicazioni fra spazi di dimensioni (finite) differenti <u>non</u> sono invertibili. Nel caso in cui le dimensioni siano uguali, il teorema di Cramer concede ancora un'economia di fatica.

<u>TEOREMA</u>: <u>Sia</u> $A: X \to Y$, <u>lineare con</u> $\dim X = \dim Y$.
<u>Allora</u> A <u>è invertibile se e solo se è iniettiva</u>.
(<u>Alternativamente</u>, A <u>è invertibile se e solo se è suriettiva</u>.)

DIM. Dal teorema di Cramer A è biiettiva se e solo se è iniettiva (o anche se e solo se è suriettiva).

$\blacksquare$

In definitiva, se A è definita fra spazi d'uguale dimensione, provare che A è invertibile equivale a provare che $A(x) = 0$ solo se $x = 0$.

CASO $X = Y = \mathbb{R}^n$, $n > 0$.

La struttura generale di $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineare, è

$$A(x) = A\left(\sum_1^n x_i e_i\right) = \sum_1^n x_i A(e_i) = \sum_1^n x_i A_i$$

ove x_i sono le coordinate di x rispetto alla base canonica, mentre $A_i = A(e_i)$ sono le immagini, mediante A, dei vettori della base canonica stessa, appartenenti ad $\mathbb{R}^n$.

Il criterio precedente dice che A è invertibile se e solo se $A(0) = \sum_1^n x_i A_i = 0 \Rightarrow x_i = 0$, e dunque se e solo se $A_1, A_2, .., A_n$ sono indipendenti. Dal teorema dei generatori, essendo n il loro numero, essi risultano una base di $\mathbb{R}^n$. Dunque, le applicazioni invertibili su $\mathbb{R}^n$ sono quelle che trasformano la base canonica in una <u>base</u> di $\mathbb{R}^n$.

E' bene osservare che la definizione originale di invertibilità prescrive di studiare il sistema $\sum x_i A(e_i) = y$, e di provare che esso ha un'unica soluzione per ogni $y \in Y$ (e cioè $A^{-1}(y)$).

Per il teorema dei generatori, ciò accade se e solo se il sistema omogeneo $\sum x_i A_i = 0$ ha solo la soluzione banale $x_1 = x_2 = .. = x_n = 0$. Non sembra ci sia poi una grande differenza ma in realtà si risparmia la fatica di dover trattare i termini noti, che devono essere parametri, perché arbitrari.

Il vantaggio offerto dall'operare in $\mathbb{R}^n$ è che l'algoritmo di Gauss consente di studiare agevolmente il sistema omogeneo $\sum_1^n x_i A_i = 0$. Esso ha solo la soluzione $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ se e solo se, ridotto a scala, si trasforma in uno triangolare (elementi sulla diagonale non nulli e sotto la diagonale nulli, e dunque un pivot su ogni riga e su ogni colonna).

Il calcolo esplicito dell'inversa è stato già affrontato nel contributo sulla matrice inversa, mediante l'algoritmo di Gauss-Jordan, ma vale la pena di riesporne le linee generali, perché il contesto è leggermente diverso.

Essendo A^{-1} lineare, può essere espressa mediante i valori che assume su una base (ad esempio, quella canonica $e_1 \dots e_n$):

$$A^{-1}(y) = A^{-1}\left(\sum_1^n y_i e_i\right) = \sum_1^n y_i A^{-1}(e_i)$$

e dunque, la determinazione dell'inversa A^{-1} è ridotta al calcolo di $A^{-1}(e_i)$, $i = 1 \dots n$. D'altronde, $A^{-1}(e_i)$ è la soluzione (unica) X_i del sistema $A(X_i) = e_i$.

Basta dunque risolvere il sistema con n secondi membri

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \\ \hline A_1 & A_2 & \cdots & A_n & e_1 \cdots e_n \end{array}$$

e_i base canonica.

Dopo averlo ridotto a forma triangolare, azzerando tutti i termini sotto la diagonale, si può proseguire in modo analogo con i termini sopra la diagonale (Gauss-Jordan) e ridurlo alla forma "identica" mediante le operazioni consuete dell'algoritmo di Gauss (permutazioni di righe, permutazioni di colonne ricostituendo l'ordine originale alla fine, divisione di una riga per un numero, somma ad una riga di un multiplo di un'altra), fino ad ottenere il sistema "risolto"

$$e_1 \dots e_n \mid X_1 \dots X_n \qquad X_i \text{ risolve } AX_i = e_i$$

L'inversa assumerà allora la forma

$$\boxed{A^{-1}(y) = \sum_1^n y_i X_i}$$

NOTA: Se si sono operate permutazioni di colonne e si è giunti, ad esempio, al sistema "identico" (ossia "risolto")

x_3	x_1	x_4	x_2	X_1	X_2	X_3	X_4
1	0	0	0	1	5	9	13
0	1	0	0	2	6	10	14
0	0	1	0	3	7	11	15
0	0	0	1	4	8	12	16

ovvero

	X_1	X_2	X_3	X_4
$x_3 =$	1	5	9	13
$x_1 =$	2	6	10	14
$x_4 =$	3	7	11	15
$x_2 =$	4	8	12	16

occorre riordinare le componenti dei vettori colonna a secondo membro, tenendo conto degli scambi: i valori delle prime componenti delle soluzioni dei quattro sistemi, che dovranno apparire sulla prima riga dei vettori soluzione, corrispondono ai valori di x_1 e dunque sono elencati sulla seconda riga, perché x_1 è al secondo posto. Un buon sistema pratico è quello di riscrivere le incognite a sinistra nell'ordine prodotto dalle permutazioni effettuate

$$
\begin{array}{c|cccc|cccc}
 & x_3 & x_1 & x_4 & x_2 & & & & \\
\hline
x_3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 9 & 13 \\
x_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 6 & 10 & 14 \\
x_4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 7 & 11 & 15 \\
x_2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 8 & 12 & 16
\end{array}
$$

scrivendo poi come prima riga del risultato quella di x_1 (ovunque si trovi), come seconda quella di x_2 e così via, ottenendo così i valori delle incognite nel loro ordine originale x_1, x_2, x_3, x_4:

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \underset{\tilde{X}_1}{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}} \underset{\tilde{X}_2}{\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}} \underset{\tilde{X}_3}{\begin{pmatrix} 10 \\ 12 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix}} \underset{\tilde{X}_4}{\begin{pmatrix} 14 \\ 16 \\ 13 \\ 15 \end{pmatrix}}
\qquad \boxed{A(\tilde{X}_i) = e_i}
$$

Solo dopo aver riordinato le righe nella sequenza corretta, (x_1, x_2, x_3, x_4), le (nuove) colonne $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \tilde{X}_3, \tilde{X}_4$, così modificate, conterranno i vettori soluzione dei sistemi $A(X_i) = e_i$, con le loro componenti elencate nell'ordine corretto, e potranno allora essere inseriti nella formula dell'inversa:

$$
\boxed{A^{-1}(y) = A^{-1}\left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}\right) = y_1\tilde{X}_1 + y_2\tilde{X}_2 + y_3\tilde{X}_3 + y_4\tilde{X}_4, \quad \tilde{X}_i = A^{-1}(e_i)}
$$

La solita nota conclusiva sul "paradiso perduto": in dimensione infinita non si può trarre vantaggio dalla presenza di un algoritmo efficace di risoluzione dell' "equazione" $A(x)=y$. L'estrema complessità della semplice prova dell'esistenza e dell'unicità di soluzioni per tali equazioni rende il problema dell'invertibilità estremamente difficile, e fonte inesauribile di ricerche. Per applicazioni note, come ad esempio

$$u \to \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad \text{(operatore di Laplace)}$$

che viene nello studio delle proprietà del potenziale gravitazionale, è già un serio problema lo scegliere gli spazi X e Y: scelte diverse, nel tempo, hanno prodotto teorie e risultati rilevantissimi e non sempre direttamente comparabili fra loro.

Un'ultima nota, alla quale si è già fatto cenno: la formula $x = A^{-1}(y)$ è la "formula risolutiva" dell'equazione $A(x)=y$, in quanto il sostituire $A^{-1}(y)$ al posto di x in $A(x)=y$ produce l'identità $A(A^{-1}(y)) = y$. E' ciò che accade quando si definisce la radice $\sqrt{y}$ come l'inversa di $x \to y = x^2$, che è iniettiva e suriettiva da $\mathbb{R}^+$ in $\mathbb{R}^+$, o con le altre inverse elementari, che "risolvono" le rispettive equazioni.