INTERSEZIONI DI PIANI E RETTE

1.– Intersezioni di rette nel piano

a) Caso cartesiano

Date due rette di equazioni implicite

$$ax + by = c \quad e \quad a'x + b'y = c'$$

le (eventuali) intersezioni sono le soluzioni (x, y) comuni ad entrambe le equazioni e cioè le soluzioni di

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Il sistema (quadrato) può avere nessuna soluzione, come ad esempio $x + y = 0$; $x + y = 1$, infinite soluzioni, come $x + y = 1$; $2x + 2y = 2$, od una e una sola soluzione (quando $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$), come per $x + y = 1$, $2x + y = 3$.

NEL PIANO:

se due rette non hanno punti comuni sono **PARALLELE**

se hanno due (e quindi infiniti) punti comuni sono **COINCIDENTI** se hanno un unico punto in comune, sono

INCIDENTI

b) *Caso parametrico*

Date due rette parametriche nel piano

$$\begin{cases} x = x_0 + sa \\ y = y_0 + sb \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} x = x_0' + ta' \\ y = y_0' + tb' \end{cases}$$

un punto $\bar{x}, \bar{y}$ appartiene ad entrambe le rette

se e solo se $\exists\, \bar{s}, \bar{t} \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{cases} \bar{x} = x_0 + \bar{s}a \\ \bar{y} = y_0 + \bar{s}b \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} \bar{x} = x_0' + \bar{t}a' \\ \bar{y} = y_0' + \bar{t}b' \end{cases}$$

Dunque occorre risolvere, nelle incognite s e t, il sistema

$$\begin{cases} x_0 + sa = x_0' + ta' \\ y_0 + sb = y_0' + tb' \end{cases} \quad \text{ossia}$$

$$\boxed{\begin{cases} sa - ta' = x_0' - x_0 \\ sb - tb' = y_0' - y_0 \end{cases}}$$

Le reciproche posizioni delle rette sono identiche a quelle esposte nel caso cartesiano.

ESEMPI

Date le rette $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ le (eventuali) intersezioni sono corrispondenti alle soluzioni s, t del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e cioè

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e infine

$$\begin{cases} 1 = 2t - s \\ 1 = t - s \end{cases} \Rightarrow t = 0, \; s = -1$$

Le rette sono dunque incidenti ed il punto di intersezione si ottiene sostituendo $s = -1$ nell'equazione della prima retta (oppure $t = 0$ nell'equazione della seconda), e cioè $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$

ovvero $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$

2.- Rette nello spazio

Caso cartesiano (implicito)

Date due rette in forma implicita

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta \\ \alpha' x + \beta' y + \gamma' z = \delta' \end{cases}$$

le (eventuali) intersezioni sono rappresentate dalle soluzioni (x, y, z) comuni ai due sistemi, e cioè dalle soluzioni di

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta \\ \alpha' x + \beta' y + \gamma' z = \delta' \end{cases}$$

Tale sistema può avere <u>infinite soluzioni</u> (<u>**Rette coincidenti**</u>), un'unica soluzione (<u>**Rette incidenti**</u>), o nessuna soluzione. In tal caso le rette saranno dette <u>**parallele**</u> se sono complanari, e <u>**sghembe**</u> se non sono complanari.

Caso parametrico

Come nel caso piano, le intersezioni corrispondono alle soluzioni (s,t) del sistema sovradeterminato

$$\begin{cases} x_0 + sa = x_0' + ta' \\ y_0 + sb = y_0' + tb' \\ z_0 + sc = z_0' + tc' \end{cases}$$

3 equazioni in 2 incognite.

o, in forma vettoriale

$$x_0 + su = y_0 + tu'$$

(x_0 è (abusivamente) il vettore $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ e y_0 $\begin{pmatrix} x_0' \\ y_0' \\ z_0' \end{pmatrix}$!)

La classificazione delle reciproche posizioni delle rette coincidenti, incidenti, parallele o sghembe, può essere effettuata guardando alle loro forme vettoriali

$$x = x_0 + su \qquad x = y_0 + tv$$

Distingueremo due casi se u e v sono multipli e altri due se non lo sono.

A) $u = \lambda v$, ossia le due rette sono

$$x = x_0 + s\lambda v \qquad x = y_0 + tv$$

In tal caso $x_0 + \lambda s v = y_0 + tv$ se

$$x_0 - y_0 = (t - \lambda s) v$$

e dunque ci sono soluzioni se e solo se anche $x_0 - y_0$ è un multiplo di v.

Sia dunque $x_0 - y_0 = \mu v$ e dunque le rette diventano

$$x = y_0 + \mu v + s\lambda v = y_0 + (s\lambda + \mu) v$$

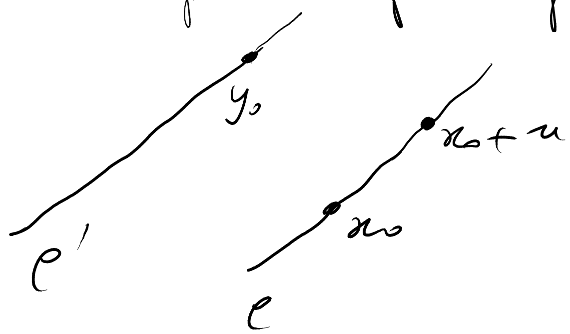
e

$$x = y_0 + t v$$

Dunque le due rette passano per y_0 e sono dirette come v (entrambe) e quindi sono <u>COINCIDENTI</u>

Se invece $x_0 - y_0$ <u>NON</u> è un multiplo di v, le rette non hanno intersezioni, come prima osservato.

Consideriamo però il piano per x_0, y_0, x_0+u



Tale piano contiene gli spostamenti diretti come u, perché portano x_0 in x_0+u

e dunque conterrà anche quelli da y_0, che stanno sul piano, sempre in direzione di u, che corrispondono a quelli sulla retta ℓ', essendo u multiplo di v.

Dunque le rette sono <u>complanari</u> e, non avendo punti comuni, sono <u>parallele</u>. Dunque

Se $u = \lambda v$ le rette sono dette:

<u>COINCIDENTI</u> se hanno punti comuni

<u>PARALLELE</u> se non hanno punti comuni

Se invece u e v **NON** sono multipli

allora le rette non possono avere più di un punto in comune, perché se ne avessero due, lo spostamento fra di essi dovrebbe essere multiplo sia di u sia di v, contro l'ipotesi che u e v non sono multipli.
Dunque le rette possono avere un'intersezione o nessuna.

Se $u \neq \lambda v \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$ allora le rette sono

<u>INCIDENTI</u> se hanno un punto in comune

<u>SGHEMBE</u> se non hanno punti comuni.

<u>Esempi</u>

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} \quad e \quad \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}$$

sono o coincidenti o parallele, perché

$$\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$$

Per decidere, studiamo l'intersezione

$$\begin{cases} 1+s = 2t \\ \underline{0 = 1} \\ 1+2s = 1+4t \end{cases} \longrightarrow \text{Nessuna soluzione}$$

e dunque sono parallele

Le rette $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-2\\-4\\-2\end{pmatrix}$

sono coincidenti o parallele, perché $\begin{pmatrix}-2\\-4\\-2\end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 1 + s = 2 - 2t \\ 1 + 2s = 3 - 4t \\ 2 + s = 3 - 2t \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} s + 2t = 1 \\ 2s + 4t = 2 \\ s + 2t = 1 \end{cases}$$

ha infinite soluzioni, perché la seconda e la terza equazione sono multipli della prima e dunque basta che

$$s = 1 - 2t$$

che ha infinite soluzioni: <u>rette coincidenti</u>

Le rette $(1,2,2) + s(1,2,1)$ e $(0,1,1) + t(0,1,1)$ sono incidenti o sghembe perché $(1,2,1)$ <u>NON</u> è multiplo di $(0,1,1)$.

$$\begin{cases} 1 + s = 0 \\ 2 + 2s = 1 + t \\ 2 + s = 1 + t \end{cases} \iff \begin{cases} s = -1 \\ t = -1 \\ t = 0 \end{cases} \quad \text{Nessuna soluzione}$$

e sono dunque <u>sghembe</u>.

Le rette $(1,0,0) + s(0,1,1)$ e $(0,1,0) + t(1,0,1)$ sono incidenti o sghembe perché $(0,1,1)$ non è multiplo di $(1,0,1)$. Il sistema

$$\begin{cases} 1 + 0s = 0 + 1t \\ 0 + 1s = 1 + 0t \\ 0 + 1s = 0 + 1 \cdot t \end{cases}$$

e cioè

$$\begin{cases} 1 = t \\ s = 1 \\ s = t \end{cases}$$ ha la soluzione (unica) $s = t = 1$

ed il punto d'intersezione è $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3._ Piani nello spazio.

<u>Caso cartesiano</u>

Il sistema $\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$ può avere,

ridotto a scala,

$\boxed{\text{infinite soluzioni}}$, dipendenti da **<u>una sola variabile NON pivot</u>**. In tal caso i piani si **<u>intersecano lungo una retta</u>**, la cui equazione parametrica si ottiene risolvendo il sistema, e il cui parametro sarà la variabile "non pivot" scelta.

$\boxed{\text{infinite soluzioni}}$, dipendenti da **<u>due variabili NON pivot</u>**. In tal caso i piani hanno a comune tre punti non allineati sono **<u>coincidenti</u>**.

$\boxed{\text{Nessuna soluzione}}$

In tal caso i coefficienti delle incognite di un piano sono multipli dell'altro, ma i termini noti non lo sono (secondo lo stesso fattore). Dunque le direzioni normali sono uguali e i piani sono **<u>paralleli</u>**.

Caso parametrico

Dati i due piani

$$\begin{cases} x = x_0 + sa + t\alpha \\ y = y_0 + sb + t\beta \\ z = z_0 + sc + t\gamma \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} x = x_0' + \sigma a' + \theta\alpha' \\ y = y_0' + \sigma b' + \theta\beta' \\ z = z_0' + \sigma c' + \theta\gamma' \end{cases}$$

Il sistema delle intersezioni nelle incognite s, t, σ, θ è

$$\begin{cases} x_0 + sa + t\alpha = x_0' + \sigma a' + \theta\alpha' \\ y_0 + sb + t\beta = y_0' + \sigma b' + \theta\beta' \\ z_0 + sc + t\gamma = z_0' + \sigma c' + \theta\gamma' \end{cases}$$

e risulta di tre equazioni in quattro incognite.
Se non è impossibile (piani paralleli), avrà certamente almeno un'incognita NON pivot (le incognite sono più delle equazioni) e dunque avrà infinite soluzioni. Se esse dipendono da un'unica variabile non pivot, i piani si intersecano lungo una retta e tale variabile è il parametro. Se dipendono da due pivot i piani coincidono