ESEMPI DI CAMBI DI VARIABILE

$$\int_T \frac{dx\,dy}{xy}$$

$$T = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; 0 < x < y < 2x, \quad 1 < x+y < 3 \right\}$$

Il dominio può scriversi anche

$$\left\{ x > 0 \; ; \; 1 < \frac{y}{x} < 2 \; ; \; 1 < x+y < 3 \right\}$$

il che suggerisce il cambio di variabili

$$u = \frac{y}{x} \qquad v = x+y$$

che rende il dominio dato immagine dell'intervallo $[1,2] \times [1,3]$. Occorre dunque esprimere x e y in funzione di u e v, le nuove variabili, buone per il dominio. Si ha, dalla prima equazione $y = ux$ e, sostituendo nella seconda $v = x + ux$ da cui, risolvendo rispetto ad x $\quad x = \dfrac{v}{1+u} \quad (0 < x < y \Rightarrow u > 0)$

da cui infine si ricava la trasformazione inversa

$$x = \frac{v}{1+u} \qquad y = ux = \frac{uv}{1+u}$$

Il determinante Jacobiano $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ è

$$\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$$

e cioè

$$\begin{vmatrix} -\dfrac{v}{(1+u)^2} & \dfrac{1}{1+u} \\[2ex] \dfrac{v(1+u)-uv}{(1+u)^2} & \dfrac{u}{1+u} \end{vmatrix} = -\frac{uv}{(1+u)^3} - \frac{v}{(1+u)^3} = -\frac{v}{(1+u)^2}$$

e, poiché nel dominio di interesse u e v sono positivi ne segue che l'elemento di volume (il <u>modulo</u> dello Jacobiano) è

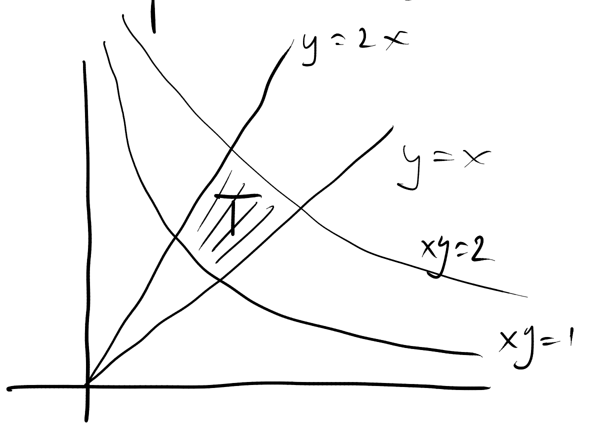
$$\frac{v}{(1+u)^2}$$

Si può dunque cambiare variabili, ottenendo

$$\int_T \frac{dxdy}{xy} = \int_1^2 du \int_1^3 dv\, \underbrace{\frac{1+u}{v}}_{\frac{1}{x}}\, \underbrace{\frac{1+u}{uv}}_{\frac{1}{y}}\, \underbrace{\frac{v}{(1+u)^2}}_{|\text{Jacobiano}|} =$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{u}\, du \int_1^3 \frac{1}{v}\, dv = \lg|2| - \lg|1| + \lg|3| - \lg|1| = \lg 6$$

Un altro esempio: calcolare l'area della regione



e cioè

$$\int_T dx\,dy \quad \text{ove} \quad T=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \begin{array}{l} 0<x<y<2x \\ 1<xy<2\end{array}\right\}$$

Di nuovo il dominio è determinato dalle disuguaglianze

$$x>0 \qquad 1<\frac{y}{x}<2 \qquad \text{e} \qquad 1<xy<2$$

ed è dunque naturale porre

$$u=\frac{y}{x} \quad \text{e} \quad v=xy$$

da cui, moltiplicando membro a membro, segue

$uv=y^2$ e dunque, essendo y, u e v positivi, $y=\sqrt{uv}$.

Dividendo, invece, membro a membro ($u>0$), si ha

$\frac{v}{u}=x^2$ e, per le stesse ragioni precedenti, si ha infine

$$x=\sqrt{\frac{v}{u}} \qquad y=\sqrt{uv}$$

inversa della trasformazione originale.

$$\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{\frac{v}{u}}}\left(-\frac{v}{u^2}\right) & \frac{1}{2\sqrt{\frac{v}{u}}}\cdot\frac{1}{u} \\ \frac{v}{2\sqrt{uv}} & \frac{u}{2\sqrt{uv}} \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} -\sqrt{\frac{u}{v}}\,\frac{v}{u^2} & \sqrt{\frac{u}{v}}\cdot\frac{1}{u} \\ \sqrt{\frac{v}{u}} & \sqrt{\frac{u}{v}} \end{vmatrix} =$$

$$= 4\left(-\frac{u}{v}\cdot\frac{v}{u^2} - \frac{1}{u}\right) = -4\left(\frac{2}{u}\right) = -\frac{2}{u}$$

Essendo, nel rettangolo $u \in [1,2]$, $v \in [1,2]$, $u>0$ ne segue che il modulo dello Jacobiano è $\frac{2}{u}$, e dunque l'area ricercata sarà

$$\int_1^2 du \int_1^2 dv \ \frac{1}{u} = 1 \cdot \lg|2| = \lg 2$$

Gli esempi presentati suggeriscono fortemente che non sempre (e non solo) è la struttura geometrica del dominio a suggerire la sostituzione da tentare: talvolta si può trarre ispirazione direttamente dalle disequazioni che lo definiscono, indipendentemente dal fatto d'essere in grado di interpretarle geometricamente. Ad esempio:

<u>Calcolare l'area di</u>

$$T = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y>0, \ x+y>0, \ x^2+y^2 < 3\sqrt{x^2+y^2} - 3x\right\}$$

Non occorre affatto impegnarsi a fondo per capire che razza di "figure" possa venir fuori dalle disequazioni, e non ci vuole molto per capire che passare a coordinate polari può eliminare il problema costituito dalla radice ad un costo abbordabile. Infatti, introducendo le coordinate polari (piane) $x=\rho\cos\theta$ e $y=\rho\sin\theta$ si ha

$$\begin{cases} \rho\sin\theta>0 \\ \rho\cos\theta+\rho\sin\theta>0 \\ \rho^2<3\rho-3\rho\cos\theta \end{cases}$$

Dalla prima si ha ($\rho>0$) $\sin\theta>0$ $\quad\theta\in\,]0,\pi[$.
Dalla seconda ($\rho>0$), $\cos\theta+\sin\theta>0$ $\quad\cos\theta>-\sin\theta$ e cioè $\theta\in\,]0,\frac{3}{4}\pi[$ (in effetti $x+y>0$ è il semipiano sopra la bisettrice del II quadrante; un po' di geometria non guasta mai, se è un mezzo e non un fine!)
Dall'ultima si ha infine ($\rho>0$) $\rho<3(1-\cos\theta)$ e, in definitiva, il dominio dato è immagine di quello, in coordinate polari,

$$\theta\in\left[0,\frac{3}{4}\pi\right]\qquad 0<\rho<3(1-\cos\theta)$$

di aspetto considerevolmente meno repellente di quello iniziale. Si ha dunque:

$$\text{Area}(T) = \int_T 1 \, dx\,dy = \int_0^{\frac{3}{4}\pi} d\theta \int_0^{3(1-\cos\theta)} \rho \, d\rho =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{3}{4}\pi} d\theta \; 9(1-\cos\theta)^2 = \frac{9}{2}\int_0^{\frac{3}{4}\pi} 1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta \, d\theta =$$

$$= \frac{9}{2}\cdot\frac{3}{4}\pi - 9\left(\sin\frac{3}{4}\pi\right) + \frac{9}{2}\int_0^{\frac{3}{4}\pi} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta =$$

$$= \frac{27}{8}\pi + 9\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{9}{4}\,\frac{3}{4}\pi + \frac{9}{8}\sin 2\cdot\frac{3}{4}\pi =$$

$$= \frac{27}{8}\pi - \frac{9\sqrt{2}}{2} + \frac{27}{16}\pi - \frac{9}{8} = \frac{81}{16}\pi - \frac{36\sqrt{2}+9}{8}$$

E' bene ripetere che ogni informazione geometrica è di gran valore se consente di abbreviare calcoli e verifiche, mentre diventa fuorviante se diventa un fine: determinare l'area di una regione è perfettamente possibile anche in molti casi nei quali non si è in grado di disegnarla.