IL TEOREMA DI GRASSMANN PER LE APPLICAZIONI LINEARI.

(18-11-2016)

In queste note verranno presentati alcuni risultati concernenti le applicazioni lineari definite su uno spazio di dimensione finita, che includono la celebre formula di Grassmann sulle dimensioni del dominio, dell'immagine, e del nucleo.
Alla base di tutto sta il seguente:

LEMMA 1 (generatori dell'immagine): Sia $\mathcal{A}: X \to Y$ un'applicazione lineare, con $0 < \dim X = n < \infty$; siano $x_1, x_2, \dots, x_n$ i vettori di una base di X. Allora

$$\mathcal{A}(X) = \langle \mathcal{A}(x_1), \mathcal{A}(x_2), \dots, \mathcal{A}(x_n) \rangle$$

DIM. Sia x un qualunque vettore in X. Poiché $x_1 \dots x_n$ è una base, esisteranno $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ tali che $x=\sum_1^n \lambda_i x_i$ da cui, per la linearità,

$$A(x)=A\left(\sum_1^n \lambda_i x_i\right)=\sum_1^n \lambda_i A(x_i)\in \langle A(x_1),\dots,A(x_n)\rangle.$$

Ne segue che ogni elemento di $A(X)$ appartiene allo span precedente e cioè

$$A(X)\subseteq \langle A(x_1),\dots,A(x_n)\rangle$$

D'altronde, $\forall\, i=1..n$ $\;A(x_i)\in A(X)$ e, essendo $A(X)$ un sottospazio di Y e contenendo $A(x_1),\dots,A(x_n)$, contiene anche le loro combinazioni lineari, e cioè

$$\langle A(x_1),\dots,A(x_n)\rangle \subseteq A(X)$$

$\blacksquare$

Siamo ora nelle condizioni di provare il seguente importante

TEOREMA 2 (*di GRASSMANN, sulle applicazioni lineari*): *Sia* $A: X\to Y$ *lineare*, *con* $\dim X = n<\infty$. *Allora si ha:*

$$\dim \operatorname{Ker} A + \dim A(X) = \dim X$$

DIM. La dimostrazione richiede di trattare differentemente i casi nei quali $\dim \operatorname{Ker} A = 0$ e $\dim A(X) = 0$, ed è immediato se $\dim X = 0$.

1.- Sia $\dim \operatorname{Ker} A = 0$. Poiché $\dim X = n$ è finita e non nulla, esisterà una base $x_1 \dots x_n$ di X. Per il lemma precedente

$$A(X) = \langle A(x_1), \dots, A(x_n) \rangle.$$

Verrà ora provato che $A(x_1) \dots A(x_n)$ sono indipendenti. Infatti, se $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono i coefficienti di una combinazione nulla, dalla linearità di A,

$$0 = \sum_1^n \lambda_i A(x_i) = A\left(\sum_1^n \lambda_i x_i\right),$$ e dunque $\sum_1^n \lambda_i x_i \in \operatorname{Ker} A$.

Poiché $\operatorname{Ker} A = \{0\}$, ne segue $\sum_1^n \lambda_i x_i = 0$ e, dall'indipendenza di $x_1 \dots x_n$, base di X, $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

Dunque, $A(x_1), \dots, A(x_n)$ (generatori di $A(X)$ indipendenti) formano una base di $A(X)$ e, di conseguenza, $\dim A(X) = n$.

La formula è dunque verificata.

2.- Sia $\dim A(X) = 0$, da cui $A(X) = \{0\}$, e cioè $A(x) = 0 \ \forall x \in X$.

Ne segue subito $\mathrm{Ker}\,\mathcal{A} = X$ e, poiché $\dim \mathcal{A}(X) = 0$, la formula è verificata.

3.– Sia infine $0 < \dim \mathrm{Ker}\,\mathcal{A} = k < \dim X = n$.

In tal caso, sia $w_1 \dots w_k$ una base di $\mathrm{Ker}\,\mathcal{A}$, che esiste poiché la sua dimensione è finita e non nulla. Sia inoltre $w_1 \dots w_k\, x_{k+1} \dots x_n$ una base di X ottenuta per completamento.

Dal lemma precedente segue che

$$\mathcal{A}(X) = \langle \mathcal{A}(w_1), \mathcal{A}(w_2), \dots, \mathcal{A}(w_k), \mathcal{A}(x_{k+1}), \dots, \mathcal{A}(x_n) \rangle$$

Poiché $w_i \in \mathrm{Ker}\,\mathcal{A}$, ne segue $\mathcal{A}(w_i) = 0 \ \forall i = 1..k$. Essendo $0 \in \langle \mathcal{A}(x_{k+1}) .. \mathcal{A}(x_n) \rangle$, ciascuno dei vettori (nulli) $\mathcal{A}(w_i)$ $i = 1..k$, può, per il lemma fondamentale, essere soppresso senza alterare lo span precedente, e dunque

$$\mathcal{A}(X) = \langle \mathcal{A}(x_{k+1}), \dots, \mathcal{A}(x_n) \rangle.$$

I generatori $A(x_{k+1}) \dots A(x_n)$ sono indipendenti in questo, come già visto nel caso 1), se $\lambda_{k+1} \dots \lambda_n$ sono i coefficienti d'una combinazione nulla

$$0 = \sum_{k+1}^{n} \lambda_i A(x_i) = A\left(\sum_{k+1}^{n} \lambda_i x_i\right), \text{ da cui } w \equiv \sum_{k+1}^{n} \lambda_i x_i \in \operatorname{Ker} A$$

Essendo $\{w_1, \dots, w_k\}$ una base per $\operatorname{Ker} A$, esistiamo $\mu_1, \dots, \mu_k$ tali che

$$\sum_{k+1}^{n} \lambda_i x_i = w = \sum_{1}^{k} \mu_j w_j, \text{ ovvero } \sum_{1}^{k} \mu_j w_j + \sum_{k+1}^{n} \lambda_i x_i = 0$$

Poiché $w_1 \dots w_k \; x_{k+1} \dots x_n$ sono indipendenti in quanto formano una base di X, ne segue

$$\mu_j = 0 \quad j = 1 \dots k \quad e \quad \boxed{\lambda_i = 0 \quad i = k+1 \dots n}.$$

Dunque, $A(x_{k+1}), \dots, A(x_n)$ sono generatori indipendenti di $A(X)$ e, di conseguenza, il loro numero $n-k$ è $\dim A(X)$.
Ricordando che $\dim \operatorname{Ker} A = k$, segue la tesi.

$\blacksquare$

Qualche nota conclusiva. Nel corso della dimostrazione del teorema di Grassmann si è visto come le immagini dei vettori di una base mediante un'applicazione lineare $A: X \to Y$ sono sì generatori di $A(X)$, ma non sono necessariamente indipendenti: in effetti, se il nucleo contiene vettori non nulli — e ciò accade se e solo se A non è iniettiva — alcune di esse possono essere soppresse, e l'immagine ha dimensione strettamente minore di quella del dominio.
Ricordando che A è iniettiva se e solo se $\dim \operatorname{Ker} A = 0$, ne segue subito che A è iniettiva se e solo se $\dim X = \dim A(X)$: dunque le applicazioni iniettive conservano la dimensione dello spazio. Attenzione, però: il codominio può contenere strettamente l'immagine e avere dimensione maggiore, anche infinita. Dunque, da $A: X \to Y$ segue solo

$$\dim A(X) \leq \dim X,$$

mentre nulla può dirsi sulla relazione fra $\dim X$ e $\dim Y$.
Ad esempio, $A(x,y) = (x,y,0)$ è lineare, $A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, ma $A(\mathbb{R}^2) = \{(x,y,0) : x,y \in \mathbb{R}\}$ è il piano xy, che ha dimensione $2 < 3$.

Riassumiamo queste semplici osservazioni nel seguente:

TEOREMA 3 (invarianza della dimensione): Sia $A: X \to Y$ lineare, con $\dim X < \infty$. Allora

1) A è iniettiva se e solo se $\dim X = \dim A(X)$

2) A è biiettiva se e solo se

$$\dim X = \dim A(X) = \dim Y$$

DIM. Consideriamo solo il caso non banale, $\dim X > 0$. Dal teorema di Grassmann si ha che $\dim \operatorname{Ker} A = 0$ se e solo se $\dim X = \dim A(X)$, da cui segue la 1). Se poi A è biiettiva, allora è suriettiva (da cui $A(X) = Y$ e $\dim A(X) = \dim Y$) e iniettiva e, da 1), $\dim X = \dim A(X)$. Se, infine, $\dim X = \dim A(X) = \dim Y$, allora $A(X) = Y$ in quanto $A(X)$ è un sottospazio di Y, ed è di uguale dimensione, ed è iniettiva per la 1). $\blacksquare$

L'aggiunta dell'ipotesi $\dim X = \dim Y$ consente di provare risultati più raffinati, come il teorema di Cramer, già esaminati in altri contributi: sotto tale ipotesi A è iniettiva se e solo se è suriettiva e dunque, per provare la biiettività, basta provare una sola delle due. Infine, presentiamo un importante teorema strutturale sulle applicazioni lineari, che si prova con ragionamenti analoghi ai precedenti.

TEOREMA 4 (<u>decomposizione del dominio</u>): <u>sia</u> $A: X \to Y$, <u>con</u> $0 < \dim X < \infty$. <u>Allora esiste</u> X', <u>sottospazio di</u> X, <u>tale che</u>

1) $X = \operatorname{Ker} A \oplus X'$

2) A è <u>biiettiva da</u> X' <u>in</u> $A(X)$

<u>**DIM**</u>. Con le stesse definizioni e notazioni usate nella prova del teorema di Grassmann, sia $\{w_1 \ldots w_k\}$ una base di $\operatorname{Ker} A$ e $\{x_{k+1}, \ldots, x_n\}$ un suo completamento ad una di X.

Posto allora

$$X' = \langle x_{k+1}, \dots, x_n \rangle$$

dal lemma di ripartizione della base ne segue subito

$$X = \langle w_1, \dots, w_k \rangle \oplus \langle x_{k+1}, \dots, x_n \rangle$$

che è la 1).

Nella dimostrazione precedente è stato inoltre provato che $A(x_{k+1}), \dots, A(x_n)$ formano una base per $A(X)$.

Poiché $x_{k+1}, \dots, x_n$ sono indipendenti, essi formano una base di X' e, dal lemma dei generatori dell'immagine, segue che

$$A(X') = \langle A(x_{k+1}), \dots, A(x_n) \rangle = A(X).$$

Dunque, A è un'applicazione suriettiva da X' in $A(X)$.

Per provarne l'iniettività, mostriamo che $w \in X'$ e $A(w)=0 \Rightarrow w=0$, e cioè che il nucleo di A in X' è $\{0\}$. Infatti, per ogni $w \in X'$ esisteranno λ_i, $i=k+1..n$, tali che $w=\sum_{k+1}^{n} \lambda_i x_i$, e inoltre

$$0 = A(w) = \sum_{k+1}^{n} \lambda_i A(x_i).$$

Essendo $A(x_{k+1}) .. A(x_n)$ una base per $A(X)$, dalla loro indipendenza ne segue $\lambda_i = 0 \ \forall i = k+1..n$ da cui, infine,

$$w = \sum_{k+1}^{n} \lambda_i x_i = 0.$$

Dunque, A è iniettiva e suriettiva da X' in $A(X)$, che è la 2).

$\blacksquare$

Notiamo esplicitamente che A non è, in generale, iniettiva su X, ma lo è solo se ristretta ad X': in effetti il nucleo d'A in X può avere dimensione grande, ma è il suo nucleo in X' a ridursi a $\{0\}$.