IL TEOREMA DI GRASSMANN

SULLA DIMENSIONE DEI SOTTOSPAZI

Le note che seguono intendono presentare una riesposizione del classico teorema di Grassmann sulla dimensione del sottospazio somma. La dimostrazione proposta è sostanzialmente identica a quella reperibile sui testi, ma fa uso del concetto di somma diretta per rendere più chiaro il punto più delicato di tale dimostrazione. Si ricordi che

Dati X e Y sottospazi di Z, allora

- $X+Y = \{ z \in Z : \exists\, x \in X \ \exists\, y \in Y$ verificanti $z = x+y \}$

- Tale insieme è un sottospazio, ossia contiene somme e multipli scalari dei propri elementi, così come sono definiti in Z.

- La somma $X+Y$ si dice <u>DIRETTA</u> se si verifica che

$$x+y=0 \text{ con } x \in X \text{ e } y \in Y \Rightarrow x=0 \text{ e } y=0$$

– Se la somma $X+Y$ è diretta si scrive $X \oplus Y$

– $\dim X \oplus Y = \dim X + \dim Y$

Un utile criterio per decidere se la somma fra due sottospazi sia diretta, valido SOLO per le somme di <u>DUE</u> spazi e FALSO, in generale, se si sommano tre o più spazi, è fornito dal seguente:

<u>**LEMMA**</u> <u>La somma di due sottospazi è DIRETTA se e solo se la loro intersezione contiene solo il vettore nullo.</u>

<u>Dim</u>.

$$\boxed{X+Y = X \oplus Y \implies X \cap Y = \{0\}}$$

Infatti sia $z \in X \cap Y$. Allora $z \in X$ e $z \in Y$ e, di conseguenza $0 = z + (-z)$ ove $z \in X$ e $(-z) \in Y$.
Poiché la somma è diretta, ne segue immediatamente $z = 0$,

e dunque ogni vettore in $X \cap Y$ è nullo.

$$\boxed{X \cap Y = \{0\} \Longrightarrow X + Y = X \oplus Y}$$

Siano $x \in X$ e $y \in Y$ tali che $x + y = 0$. Ne segue che $x = -y$.

Essendo $x \in X$, $-y \in Y$ ed essendo uguali, ne segue $x \in X \cap Y$

e, dall'ipotesi $X \cap Y = \{0\}$, anche $x = 0$. Da $x = -y$ segue infine

$y = 0$, il che completa la tesi.

$\blacksquare$

Per provare il teorema di Grassmann sarà utile il seguente

LEMMA Sia $x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots x_n$ una base di X.

Allora

$$X = \langle x_1 \ldots x_k \rangle \oplus \langle x_{k+1} \ldots x_n \rangle$$

DIM Siano $x \in \langle x_1, \ldots, x_k \rangle$ e $x' \in \langle x_{k+1}, \ldots, x_n \rangle$

tali che $x + x' = 0$, e proviamo che $x = x' = 0$.

Infatti, per opportuni α_i e α_j si ha $x = \sum_1^k \alpha_i x_i$ e $x' = \sum_{k+1}^n \alpha_j x_j$,

da cui
$$\sum_1^k \alpha_i x_i + \sum_{k+1}^n \alpha_j x_j = 0$$

Poiché $x_1 .. x_n$ è un sistema indipendente ne segue

$$\alpha_i = 0 \quad \forall i = 1..k \, , \qquad \alpha'_j = 0 \quad \forall j = k+1..n$$

e infine

$$x = \sum_1^k \alpha_i x_i = 0 \qquad x' = \sum_{k+1}^n \alpha'_j x_j = 0$$

$\square$

Siamo ora in condizione di dimostrare il risultato principale.

TEOREMA (Grassmann) Siano X e Y sottospazi di uno spazio vettoriale Z, di dimensione finita. Allora

$$\dim X+Y + \dim X \cap Y = \dim X + \dim Y$$

DIM.

$$\boxed{\text{I caso: } \dim X \cap Y = 0 \Leftrightarrow X \cap Y = \{0\}}$$

In tal caso, per effetto della condizione $X \cap Y = \{0\}$, la somma $X+Y$ è diretta, e dunque $\dim X+Y = \dim X + \dim Y$, che è la tesi.

$\boxed{\text{II caso: } \dim X \cap Y > 0}$

Tutti gli spazi, $X+Y$, X, Y, $X \cap Y$, essendo sottospazi dello spazio Z, di dimensione finita, ed essendo tutti di dimensione non nulla in quanto $X \supseteq X \cap Y$ e $Y \supseteq X \cap Y$, sono dotati di basi, per il teorema di esistenza della base.

Sia $w_1 \dots w_k$ una base di $X \cap Y$, da cui $\dim X \cap Y = k$.

Siano

$$w_1 \dots w_k \; x_{k+1} \dots x_n$$

e

$$w_1 \dots w_k \; y_{k+1} \dots y_m$$

due basi ottenute (per il teorema del completamento) completando il sistema di vettori indipendenti $w_1 \dots w_k$, che appartengono ad $X \cap Y$ (e quindi tanto ad X, quanto ad Y) ad una base di X e di Y rispettivamente. Ne segue dalla definizione di dimensione che $\dim X = n$ e $\dim Y = m$.

Verrà ora provato che i vettori

$$w_1, \dots, w_k, x_{k+1}, \dots, x_n, y_{k+1}, \dots, y_m$$

formano una base per $X+Y$, e poiché il loro numero è $n+m-k$, ne segue che $\dim X+Y = n+m-k$, il che è la tesi. Proviamo che:

$$\boxed{X+Y = \langle w_1,\dots,w_k, x_{k+1},\dots,x_n, y_{k+1},\dots,y_m\rangle}$$

Infatti, sia $z \in X+Y$ e siano $x \in X$ e $y \in Y$ tali che

$$z = x+y \qquad (*)$$

Poiché $X = \langle w_1,\dots,w_k, x_{k+1},\dots x_n\rangle$ segue che esistono α_i, β_j tali che $x = \sum_1^k \alpha_i w_i + \sum_{k+1}^n \beta_j x_j$. Analogamente, per opportuni α_i' e γ_h si avrà $y = \sum_1^k \alpha_i' w_i + \sum_{h=k+1}^m \gamma_h y_h$ e, da $(*)$ segue

$$z = \sum_1^k \alpha_i w_1 + \sum_{k+1}^n \beta_j x_j + \sum_1^k \alpha_i' w_i + \sum_{k+1}^m \gamma_h y_h$$

e dunque $z \in \langle w_1,\dots,w_k, x_{k+1},\dots,x_n, y_{k+1},\dots,y_m\rangle$.

$$\boxed{w_1,\dots,w_k,\ x_{k+1},\dots,x_n,\ y_{k+1},\dots,y_m \text{ sono indipendenti}}$$

Supponiamo che $\sum_1^k \alpha_i w_i + \sum_{k+1}^n \beta_j x_j + \sum_{k+1}^m \gamma_h y_h = 0 \quad (**)$

e dimostriamo che $\alpha_i = 0, \beta_j = 0, \gamma_h = 0 \quad \forall i, j, h$. Infatti

posto $\sum_1^k \alpha_i w_i = w$, $\sum_{k+1}^n \beta_j x_j = x$ e $\sum_{k+1}^m \gamma_h y_h = -y$

dall'uguaglianza precedente segue $w + x = y$. Si ha

$w \in X \cap Y$, $x \in X$ e $y \in Y$, perché combinazioni di vettori di W, X

e Y rispettivamente.

Vale anche $y \in X$, in quanto $y = w + x$, che è somma

di vettori di X. Dunque $y \in X \cap Y$ e, di conseguenza,

si ha

$(w-y) + x = 0$, $(w-y) \in X \cap Y = \langle w_1 \dots w_k \rangle$, $x \in \langle x_{k+1} \dots x_n \rangle$.

Poiché $w_1 \dots w_k, x_{k+1} \dots x_n$ formano una base di X, dal lemma

precedente segue che $X = \langle w_1 \dots w_k \rangle \oplus \langle x_{k+1} \dots x_n \rangle$

e dunque, dalla definizione di somma diretta, segue ancora

$$w - y = 0 \quad e \quad x = 0.$$

Infine, poiché $0 = x = \sum_{k+1}^n \beta_j x_j = 0$, essendo $x_{k+1} \dots x_n$ indipendenti

segue $\beta_j = 0 \ \forall j = k+1 \dots n$. Sostituendo in (**) si ha ancora

$\sum_1^k \alpha_i w_i + \sum_{k+1}^m \gamma_h y_h = 0$. Dall'indipendenza di $w_1, \dots, w_k, y_{k+1}, \dots y_m$, ne

segue infine $\alpha_i = 0$ e $\gamma_h = 0 \ \forall i, h$ che, con $\beta_j = 0$, dà la tesi. $\blacksquare$

Il teorema precedente permette di provare agilmente, per via algebrica, alcuni risultati geometrici. Ad esempio, ricordando che i piani per l'origine dello spazio $\mathbb{R}^3$ sono i sottospazi di $\mathbb{R}^3$ di dimensione due, è facile provare che due piani per l'origine non possono intersecarsi solo nell'origine, che appartiene a tutti i sottospazi, ma devono intersecarsi almeno in una retta. Infatti $\dim X = \dim Y = 2$. Se inoltre sappiamo che $X, Y \subset \mathbb{R}^3$ ne segue che $\dim X+Y \leq 3$

Allora

se $\dim X+Y = 3 \Rightarrow \dim X \cap Y = \dim X + \dim Y - \dim X+Y = 1$

mentre se

$$\dim X+Y = 2 \Rightarrow \dim X \cap Y = 2+2-2 = 2$$

Dunque, o i piani coincidono ($\dim X \cap Y = 2$), oppure assieme generano tutto lo spazio ($\dim X+Y = 3$), ma in tal caso l'intersezione è una retta ($\dim X \cap Y = 1$).

Perché due piani possano intersecarsi solo nello $\{0\}$ ($\dim X \cap Y = 0$) occorre che lo spazio somma abbia dimensione $(\dim X + \dim Y - \dim X \cap Y = 2+2-0=4)$ (almeno) quattro.

Ancora una nota: le tre condizioni $\dim X = 0$, $0 < \dim X < \infty$ e $\dim X = \infty$ vogliono dire cose molto diverse. Ciononostante, il teorema di Grassmann vale incondizionatamente, se scritto nella forma dell'enunciato (che evita con cura la forma $\infty - \infty$!), se si calcoli $\infty + n = \infty$ e $\infty + \infty = \infty$.

Le verifiche sono immediate se si prova il seguente risultato

LEMMA $\dim X = \infty$ <u>se e solo se</u>, <u>per ogni</u> $n \in \mathbb{N}$, <u>esistono</u> $x_1 \dots x_n \in X$ <u>indipendenti</u>.

<u>DIM.</u> C.N. (per induzione su n)

Poiché $\dim X \neq 0$, $\exists\, x_1 \in X$ $x_1 \neq 0$ e dunque esistono sistemi indipendenti formati da un solo vettore.

Supponiamo ora che esistano sistemi indipendenti di n vettori (e $x_1 \dots x_n$ sia uno di essi) e costruiamone uno di $n+1$ vettori. Infatti, se $\dim X = \infty$, si ha

$X \supset \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ perché, se fosse $X = \langle x_1 \dots x_n \rangle$, sarebbe $\dim X \leq n$, e sia $x_{n+1} \in X \setminus \langle x_1 \dots x_n \rangle$.

Dal lemma sull'estensione di sistemi indipendenti, ne segue subito che $x_1 \dots x_{n+1}$ è indipendente.

Dal principio d'induzione, segue la tesi.

C. S. (per assurdo)

Se fosse $\dim X = n < \infty$ per il teorema sul massimo numero di vettori indipendenti non sarebbe possibile trovare in X più di n vettori indipendenti, contro l'ipotesi che esistano sistemi indipendenti con un numero arbitrario di elementi.

$\boxed{///}$

Utilizzando il lemma precedente è immediato provare che:

$$W \supset Z \text{ e } \dim Z = \infty \Rightarrow \dim W = \infty$$

da cui

$$\dim X \cap Y = \infty \Rightarrow \dim X = \dim Y = \dim X+Y = \infty$$

$$\dim X = \infty \Rightarrow \dim X+Y = \infty$$

Una nota finale (per i lettori più scrupolosi).

In realtà, nel teorema precedente non è stato adeguatamente illustrato un caso: il caso $X \subseteq Y$.

In tal caso, infatti, si ha $X+Y=Y$ e $X\cap Y = X$, e dunque la tesi è immediatamente verificata. A rigore, però, la prova precedente andrebbe riscritta, poiché $w_1 \dots w_k$ è già, senza alcun completamento, una base di X. Non occorre farlo, per via dell'osservazione precedente. Dunque, nei casi

$$\dim X\cap Y = 0 \quad \text{e} \quad X\cap Y = X \quad (\text{oppure } X\cap Y = Y)$$

teorema di Grassmann deve essere provato per vie diverse (più semplici) in quanto o non c'è base per $X\cap Y$, o non ci sono i vettori x_j di completamento.

Il caso più delicato è dunque quello nel quale

$$\begin{array}{ccccc} & \supset & X & \supset & \\ X+Y & & & & X\cap Y \\ & \cup & Y & \supset & \end{array}$$

e tutte le inclusioni sono strette. In tal caso, la base scelta per $X\cap Y$ (esiste e) necessita di completamenti per poter generare X o Y.