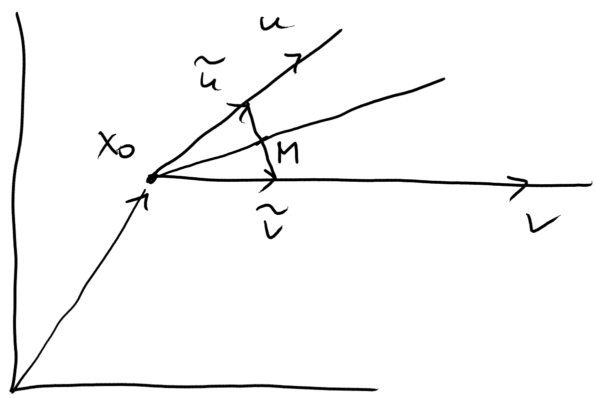
QUALCHE APPLICAZIONE GEOMETRICA

a) Bisettrice di un angolo

Poiché in un triangolo isoscele la bisettrice dell'angolo al vertice divide la base in parti uguali, si può procedere come segue.

Siano u, v gli spostamenti che generano i lati dello angolo. Sostituiamoli con due vettori di uguale lunghezza come, ad esempio, i loro versori



$\tilde{u} = \dfrac{u}{|u|}$ e $\tilde{v} = \dfrac{v}{|v|}$

A questo punto $x_0 \tilde{u} \tilde{v}$ è isoscele e la base è $\tilde{u}, \tilde{v}$. Il suo punto medio, per cui passa la bisettrice, è $M = \frac{1}{2}(\tilde{u} + \tilde{v})$ e dunque la bisettrice cercata è la retta per x_0 diretta come M e cioè

$$x = x_0 + \frac{t}{2}(\tilde{u} + \tilde{v})$$

Poiché t è arbitrario in $\mathbb{R}$, si ottiene la stessa retta rimpiazzando $\frac{\tilde{u} + \tilde{v}}{2}$ con $\tilde{u} + \tilde{v}$

Esempio:
La bisettrice dell'angolo formato dalle semirette

$$\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} \quad t>0 \quad e \quad \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} \quad (t\geq 0) \quad \text{è}$$

$$\quad x_0 \qquad\qquad u \qquad\qquad\qquad\qquad x_0 \qquad v$$

$$\tilde{u}=\frac{1}{\sqrt{4+4+1}}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} \qquad \tilde{u}+\tilde{v}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}+\frac{2}{\sqrt5}\\ \frac{2}{3}+\frac{1}{\sqrt5}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$$\tilde{v}=\frac{1}{\sqrt{4+1}}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$$

e la bisettrice è $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}\frac{2}{3}+\frac{2}{\sqrt5}\\ \frac{2}{3}+\frac{1}{\sqrt5}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}$

b) <u>ESERCIZIO</u>: Dimostrare che le mediane di un triangolo si intersecano in un punto di coordinate

$$\frac{1}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{1}{3}x_3$$

che viene detto BARICENTRO del triangolo.

c) <u>Il Centro di massa di un sistema di particelle</u>.

Siano $m_1 \dots m_n$ le masse di n particelle posizionate in $x_1 \dots x_n$. Se su ognuna di esse è applicata una forza f_i, l'equazione di Newton fornisce

$$m_i \ddot{x}_i = f_i$$

(ove $\ddot{x}_i$ è l'accelerazione subita da m_i).

Sommando si ha

$$\sum_1^n m_i \ddot{x}_i = \sum_1^n f_i$$

e, moltiplicando e dividendo il primo membro per $\sum_1^n m_i = M$

si ha, poiché la derivata seconda è lineare,

$$F \equiv \sum_1^n f_i = M \sum_1^n \frac{m_i}{M} \ddot{x}_i = M \left(\sum_1^n \frac{m_i}{M} x_i \right)^{\cdot\cdot}$$

Dunque, il punto di coordinate $\bar{x} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i$

si muove come se tutta la massa M fosse concentrata in esso

e tutte le forze $\sum_1^n f_i$ venissero esercitate su di esso.

Osserviamo che i coefficienti $\frac{M_i}{M}$ della combinazione che definisce

$\bar{x}$ sono positivi e hanno somma uguale ad 1.

Dunque il centro di massa è interno al poliedro convesso

contenente le particelle.

Nel caso di un razzo (e dei gas che espelle, che sono tutt'uno

col razzo) il centro di massa può essere molto distante dal

razzo che vediamo viaggiare.