1) Rette

a) Retta per un punto x_0 parallela ad una direzione u

$$\boxed{x = x_0 + tu \quad t \in \mathbb{R}}$$

ovvero, in forma scalare

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = ((x_0)_1, (x_0)_2, \dots, (x_0)_n) + t(u_1, u_2, \dots, u_n) =$$

$$= ((x_0)_1 + tu_1, (x_0)_2 + tu_2, \dots, (x_0)_n + tu_n)$$

Esempio: la retta per $(2,1,-1)$ parallela alla direzione di $(1,2,3)$ è $(x,y,z) = (2,1,-1) + t(1,2,3)$

ovvero

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$$

b) Retta per due punti

Dati due punti $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, la retta per essi è la retta per x_1 nella direzione dello spostamento $x_2 - x_1$ che porta x_1 in x_2, e cioè $\boxed{x = x_1 + t(x_2 - x_1)}$ ovvero

$x = (1-t)x_1 + tx_2 \quad t \in \mathbb{R}$

Esempio La retta per $(1,2,3,4)$ e $(2,-1,0,3)$ è

$$(x,y,z,w) = (1,2,3,4) + t[(2,-1,0,3) - (1,2,3,4)] =$$

$$= (1,2,3,4) + t(1,-3,-3,-1)$$

ovvero
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 3t \\ z = 3 - 3t \\ w = 4 - t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

2) Semirette

a) Semiretta per x_0 in direzione di u.

Basta sommare allo spostamento iniziale dall'origine verso x_0 gli spostamenti sulla retta nello stesso verso di u, e cioè i suoi solo multipli **positivi**, e dunque

$$\boxed{x = x_0 + tu \quad t \geq 0}$$

b) Semiretta per x_0 in direzione opposta ad u.

$$\boxed{x = x_0 + tu \quad t \leq 0}$$

c) Semiretta per due punti x_1 e x_2

Gli spostamenti sulla semiretta sono tutti i multipli positivi di quello che porta x_1 in x_2, e cioè $x_2 - x_1$.

Dunque $$\boxed{x = x_1 + t(x_2 - x_1) \quad t \geq 0}$$

3) Segmenti

a) Segmento per due punti.

Per ottenere un segmento basta sommare ad un estremo i **sottomultipli** del vettore che lo sposta sull'altro estremo. Dunque, se x_1 e x_2 sono gli estremi allora

$$x = x_1 + t(x_2 - x_1) \quad t \in [0,1]$$

Infatti $t(x_2 - x_1)$ $t \in [0,1]$ rappresenta un vettore che ha direzione e verso di $x_2 - x_1$, ma lunghezza variabile fra 0 $(x = x_1)$ e l'intera lunghezza di $x_2 - x_1$, corrispondente a $t = 1$, per cui $x = x_1 + (x_2 - x_1) = x_2$.

<u>Esempio</u>:

Il segmento di estremi $(1,2,3)$ e $(1,0,1)$ è

$$(x,y,z) = (1,2,3) + t\left[(1,0,1) - (1,2,3)\right] =$$
$$= (1,2,3) + t(0,-2,-2) \quad t \in [0,1]$$

ovvero

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 - 2t \end{cases} \quad t \in [0,1]$$

b) <u>Punto medio di un segmento</u>.

Basta sommare ad un estremo <u>la metà</u> del suo spostamento verso l'altro. Dunque

$$\boxed{x = x_1 + \frac{1}{2}(x_2 - x_1) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)}$$

che dimostra che le coordinate del punto medio sono le media aritmetica delle coordinate, considerate separatamente. In forma scalare (in $\mathbb{R}^3$), il punto medio fra $a=(a_1,a_2,a_3)$ e $b=(b_1,b_2,b_3)$ ha coordinate:

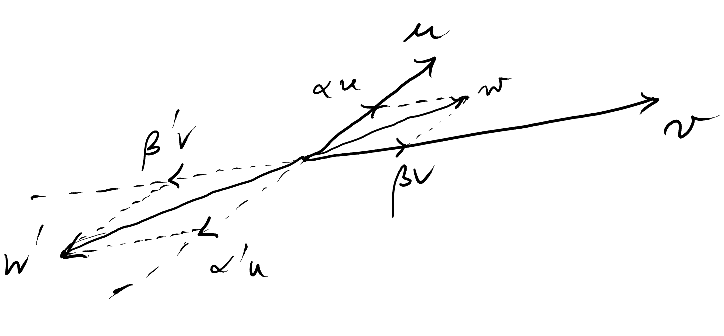
$$\frac{1}{2}(a+b) \equiv \frac{1}{2}\Big[(a_1,a_2,a_3)+(b_1,b_2,b_3)\Big]=$$

$$=\left(\frac{1}{2}(a_1+b_1),\ \frac{1}{2}(a_2+b_2),\ \frac{1}{2}(a_3+b_3)\right)$$

<u>Esempio</u> Il punto medio fra $(1,1,2,-1)$ e $(0,1,0,2)$ è $\frac{1}{2}\Big[(1,1,2,-1)+(0,1,0,2)\Big]=\left(\frac{1}{2},1,1,\frac{1}{2}\right)$

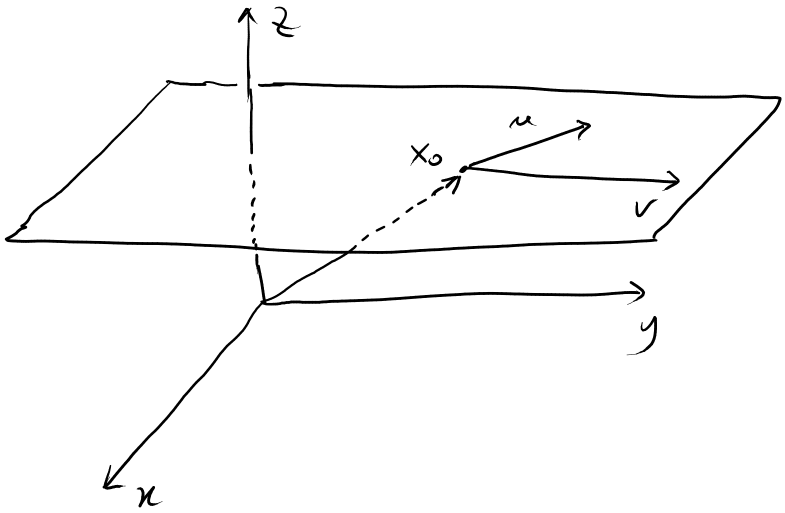
4) Piani

La regola del parallelogramma indica come ogni punto del piano che contiene due vettori non allineati è somma di loro multipli.



Dunque, un piano per il punto x_0 contenente gli spostamenti u e v sarà

$$\boxed{x = x(s,t) = x_0 + su + tv}$$



b) Piano per tre punti non allineati

Siano x_1, x_2, x_3 i tre punti. Il piano contiene allora gli spostamenti da x_1 a x_2, e cioè $x_2 - x_1$, e da x_1 a x_3, e cioè $x_3 - x_1$; i due vettori $u = x_2 - x_1$ e $v = x_3 - x_1$ sono non paralleli perché altrimenti x_1, x_2 e x_3 sarebbero stati allineati. Dunque il piano richiesto è

$$\boxed{x = x_1 + s(x_2 - x_1) + t(x_3 - x_1).}$$

Una differente espressione della precedente equazione è

$$x = (1 - s - t)x_1 + s x_2 + t x_3$$

che è una particolare <u>**COMBINAZIONE LINEARE**</u>, cioè somma di multipli, nella quale la somma dei coefficienti dei vettori è vincolata a valere 1, analogamente a quanto è stato visto con la retta per due punti.

Esempio

Il piano per i tre versori degli assi $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, e $(0,0,1)$ in $\mathbb{R}^3$ contiene gli spostamenti

$$u = (0,1,0) - (1,0,0) \quad e \quad v = (0,0,1) - (1,0,0)$$

e cioè $u = (-1,1,0)$ e $v = (-1,0,1)$, sicché il piano ha equazione

$$(x,y,z) = (1,0,0) + s(-1,1,0) + t(-1,0,1)$$

ossia

$$\begin{cases} x = 1 - s - t \\ y = s \\ z = t \end{cases}$$

osserviamo incidentalmente che, sostituendo y ad s e z a t, come le ultime due equazioni ci consentono di fare si ottiene l'equazione $x = 1 - y - z$, che è l'equazione <u>cartesiana</u> del piano, non contenente più parametri, che esprime solo un vincolo reciproco per le coordinate x, y, z e non una funzione dai parametri (s,t) ai punti (x,y,z).

L'altra via di scrivere l'equazione del piano per i tre versori è di usare la seconda formula

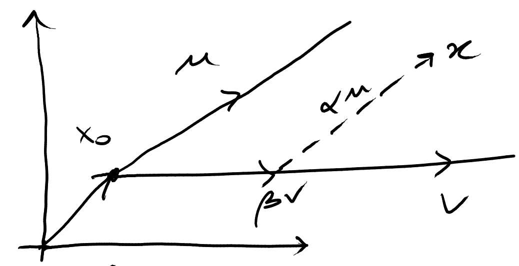
$$(x,y,z) = (1-s-t)(1,0,0) + s(0,1,0) + t(0,0,1) =$$

che sviluppata fornisce la stessa espressione precedente.

5) Angoli

a) Angoli convessi

L'angolo convesso generato da due semirette aventi comune origine può essere espresso usando opportune combinazioni fra due vettori che generano gli spostamenti sulle semirette.



Ogni punto appartenente all'angolo può infatti essere raggiunto dal vertice sommando uno spostamento lungo una delle semirette con uno lungo l'altro, e cioè

$$\boxed{x = x_0 + \alpha u + \beta v \qquad \underline{\alpha, \beta > 0}}$$

I vettori ottenuti considerando le combinazioni lineari di due o più vettori, **A COEFFICIENTI POSITIVI**, vengono dette **COMBINAZIONI CONICHE**. Dunque x è combinazione conica di $x_1 \dots x_k$ se

$$\boxed{x = \sum_{1}^{k} \alpha_i x_i \qquad \alpha_i \geq 0}$$

Il caso particolare nel quale u e v sono multipli l'uno dell'altro verrà trattato a parte, nelle sezione sui semipiani.

Esempio

L'angolo fra la prima bisettrice e l'asse y nel primo quadrante.

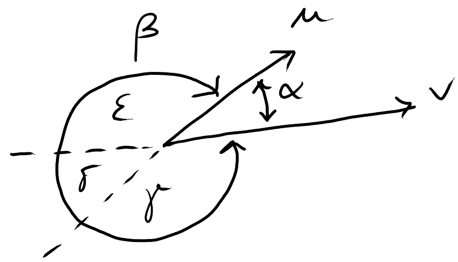
La semiretta bisettrice del primo quadrante è generata (ad esempio) da $(1,1)$, mentre per la semiretta verticale nel primo quadrante si può scegliere come spostamento generatore $(0,1)$. L'angolo richiesto sarà allora

$$\underbrace{(x,y)=(0,0)}_{\text{vertice}}+s(1,1)+t(0,1) \qquad s,t>0$$

ossia

$$\begin{cases} x=s \\ y=s+t \end{cases} \qquad s,t\geq 0$$

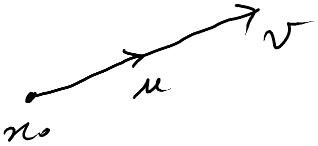
b) Angoli concavi



L'angolo concavo β, "esterno" all'angolo convesso α prima trattato, è unione dei tre angoli convessi $\gamma, \delta, \varepsilon$ che hanno rispettivamente come generatori $-u$ e v, $-u$ e $-v$, u e $-v$. Dunque gli angoli concavi possono essere ridotti a quelli convessi.

c) Semipiani

La trattazione precedente sugli angoli ha lasciato fuori due casi particolari importanti: quello in cui i vettori u e v hanno la stessa direzione e lo stesso verso



nel quale l'"angolo" è la semiretta stessa generata da u (o da v) e quello, molto diverso, nel quale u e v hanno la stessa direzione ma verso *opposto*.

Se u e v hanno direzione e verso comuni, l'uno è multiplo *positivo* dell'altro e cioè $u = \lambda v$ $\lambda > 0$, e

$$x = x_0 + su + tv = x_0 + (s\lambda + t)v$$

e, poiché $\lambda, s, t > 0$ ne segue che al variare di s e t il punto $x_0 + (s\lambda + t)v$ descrive la semiretta generata da v.

Se invece u e v hanno la stessa direzione, ma verso *opposto*, allora u è un multiplo negativo di v e dunque

$$x = x_0 + (s\lambda + t)v \qquad \lambda < 0$$

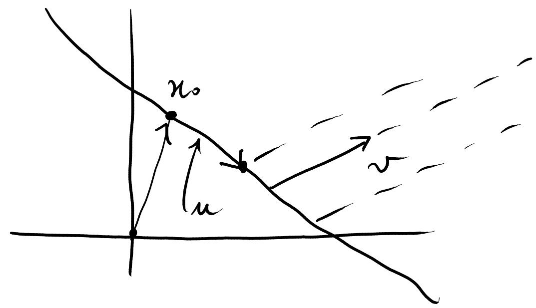
Poiché se $a \geq 0$ basta porre $s = 0$ $t = a$ per ottenere

$$s\lambda + t = a$$

mentre se $a < 0$ si può porre $t = 0$ ed $s = \frac{a}{\lambda}$, ne segue che in questo caso l'equazione $x = x_0 + (s\lambda + t)v$ non descrive l'angolo (o gli angoli) piatti ma solo *tutta* la retta per x_0 nella direzione di u (o v, è lo stesso).

Occorre quindi trattare a parte il caso dei semipiani, che non possono essere generati usando solo spostamenti allineati con la retta loro origine.

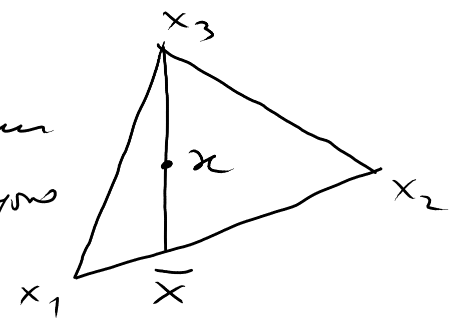
Un semipiano, avente origine dalla retta $x_0 + tu$, può essere rappresentato sommando ad un generico punto della retta un multiplo positivo di uno spostamento che dalla retta sia diretto "all'interno" del semipiano



$$\boxed{\begin{array}{c} x = x_0 + tu + sv \\ \text{ove però } t \in \mathbb{R} \text{ e } s \geq 0 \end{array}}$$

6) Triangoli e poligoni convessi

Una rappresentazione vettoriale dei triangoli e dei poligoni convessi può essere facilmente ricavata da quella del segmento



Infatti, i punti appartenenti ad un triangolo di vertici x_1, x_2, x_3 appartengono a qualche segmento avente origine in un vertice e estremo sul lato opposto del triangolo. Nella figura accanto, $\bar{x}$ appartiene al segmento $x_1 x_2$ e dunque $\exists\, t \in [0,1]$: $\bar{x} = (1-t)x_1 + tx_2$. Inoltre x appartiene al segmento $\bar{x}\, x_3$ e dunque $\exists\, s \in [0,1]$ tale che

$$x = (1-s)\bar{x} + s x_3 = (1-s)(1-t)x_1 + (1-s)t x_2 + s x_3$$

ove

$$(1-s)(1-t) + (1-s)t + s = 1$$

e inoltre

$$s,\ (1-s)t,\ (1-s)(1-t) \in [0,1]$$

DEFINIZIONE Dati $x_1 \dots x_k$, si dirà loro **COMBINAZIONE CONVESSA** ogni vettore x tale che

$$x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i \qquad \alpha_i \in [0,1] \ \forall i = 1..k$$

Con tale terminologia, il triangolo di vertici $x_1\ x_2$ e x_3 è contenuto nell'insieme delle loro combinazioni convesse. In realtà, il triangolo **COINCIDE** con l'insieme delle combinazioni convesse.

Infatti sia $X = \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3$ ove $\alpha, \beta, \gamma > 0$ e $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Allora $\alpha + \beta = 1 - \gamma$ e dunque

$$x = (1-\gamma)\left[\frac{\alpha}{\alpha+\beta} x_1 + \frac{\beta}{\alpha+\beta} x_2\right] + \gamma x_3 \qquad \gamma \in [0,1]$$

e dunque x appartiene al segmento di estremi x_3 e $\bar{x} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} x_1 + \frac{\beta}{\alpha+\beta} x_2$. A sua volta, poiché $\frac{\alpha}{\alpha+\beta} + \frac{\beta}{\alpha+\beta} = 1$, ne segue che $\bar{x}$ appartiene al segmento di estremi x_1 e x_2, e dunque x sta nel triangolo per ogni scelta di α, β, γ.

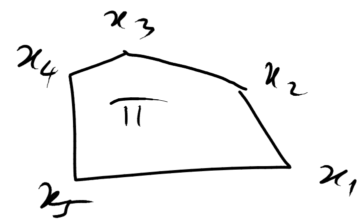
Dunque i

Il triangolo di vertici x_1, x_2, x_3 è l'insieme delle loro combinazioni convesse

$$\boxed{\begin{array}{l} x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 \\ \text{ove} \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in [0,1] \quad \text{e} \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \end{array}}$$

Per induzione, è facile dimostrare che, se $x_1 x_2 \dots x_n$ sono i vertici di un poligono convesso, cioè contenente tutti i segmenti aventi estremi nel poligono, allora i punti appartenenti al poligono sono tutti e sole le combinazioni convesse dei suoi vertici, cioè se

$$\boxed{\begin{array}{l} x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \\ \text{con} \quad \alpha_i \in [0,1] \quad \text{e} \quad \sum \alpha_i = 1 \end{array}}$$



Infatti la proprietà è provata per i triangoli (o per i segmenti, cioè per $n=3$ o 2). Supponiamola vera per i poligoni ad $n-1$ vertici e dimostriamola per quelli ad n vertici.

Il poligono (ad n vertici) dato sarà unione di tutti i segmenti originati dall'ultimo vertice x_n e aventi

l'altro estremo nel poligono $\Pi(x_1 \dots x_{n-1})$ generato dai primi $n-1$ vertici.
Dunque ogni x del poligono dato verificherà

$$x = (1-s)\,\bar{x} + s\,x_n \qquad s \in [0,1] \quad \bar{x} \in \Pi(x_1 \dots x_{n-1})$$

Si può ora applicare l'ipotesi induttiva, perché $\Pi(x_1 \dots x_{n-1})$ ha $n-1$ vertici e dunque $\exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in [0,1]$ $\sum_1^{n-1} \alpha_i = 1$ tali che

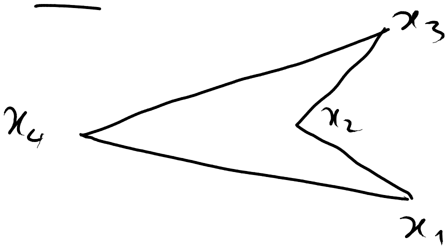
$$\bar{x} = \sum_1^{n-1} \alpha_i x_i$$

e dunque

$$x = \sum_1^{n-1} (1-s)\alpha_i x_i + s\,x_n \qquad (*)$$

Poiché $s, \alpha_i \in [0,1]$ anche $(1-s)\alpha_i \in [0,1]$ e inoltre poiché $\sum_1^{n-1} \alpha_i = 1$ ne segue che $\sum_1^{n-1} (1-s)\alpha_i = (1-s)$ e infine che $\sum_1^{n-1} (1-s)\alpha_i + s = 1$, e dunque $(*)$ implica che x è una combinazione convessa di $x_1 \dots x_n$.
Ragionando come per il triangolo si prova che <u>ogni</u> combinazione convessa di $x_1 \dots x_n$ è un punto di un segmento di estremi x_n e $\Pi(x_1 \dots x_{n-1})$, e dunque un punto del poligono dato.

<u>ATTENZIONE</u>: se il poligono <u>non</u> è convesso <u>NON</u> può essere ottenuto in tal modo. Infatti, fra le



combinazioni convesse $\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \Gamma x_4$ ci sono quelle del tipo $\delta = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 1-\alpha$, che producono

$$x = (1-\alpha) x_3 + \alpha x_1$$

che è un punto del segmento $x_1 x_3$, esterno (esterni a parti) al poligono in figura.

Ciò che si ottiene **NON** è il poligono dato, ma il più piccolo poligono convesso che lo contiene, il cosiddetto **INVOLUCRO CONVESSO** del poligono dato.

7) Poliedri convessi

Dati $x_1 \dots x_n \in \mathbb{R}^k$, il minimo poliedro convesso che li contiene è l'insieme delle loro combinazioni convesse

$$\boxed{x = \sum_1^n \alpha_i x_i \qquad \alpha_i \in [0,1] \text{ e } \sum_1^n \alpha_i = 1}$$