ESISTENZA DI PUNTI DI MINIMA DISTANZA FRA DUE RETTE

Date due rette parametriche

$$\gamma(s) = x_0 + su \qquad \sigma(t) = y_0 + tv$$

si può provare, utilizzando il teorema di Pitagora, che ogni coppia di punti $\gamma(\bar{s})$ e $\sigma(\bar{t})$ verificanti il sistema

$$\begin{cases} \left[\gamma(\bar{s}) - \sigma(\bar{t})\right] u = 0 \\ \\ \left[\gamma(\bar{s}) - \sigma(\bar{t})\right] v = 0 \end{cases}$$

realizza il minimo della distanza fra una qualunque coppia di punti, uno su ciascuna retta.

La questione da affrontare per completare la risoluzione del problema è di provare la risolubilità del sistema precedente.

Sviluppando si ottiene

$$\begin{cases} (x_0 + \bar{s}u - y_0 - \bar{t}v)\, u = 0 \\ \\ (x_0 + \bar{s}u - y_0 - \bar{t}v)\, v = 0 \end{cases}$$

e cioè

$$\begin{cases} \bar{s}|u|^2 - \bar{t}uv = (y_0 - x_0)u \\ \bar{s}uv - \bar{t}|v|^2 = (y_0 - x_0)v \end{cases}$$

La questione è dunque la risolubilità del sistema

$$\begin{array}{cc|c} s & t & \\ \hline |u|^2 & -uv & (y_0-x_0)u \\ uv & -|v|^2 & (y_0-x_0)v \end{array}$$

Osserviamo che il sistema

$$\begin{array}{cc|c} s & t & \\ \hline a & b & c \\ a' & b' & c' \end{array}$$

ha certamente soluzione unica se, sottratto alla seconda equazione la I moltiplicata per $\frac{a'}{a}$ e ottenuto per essa

$$\begin{array}{cc|c} a & b & c \\ 0 & b' - \frac{a'}{a}b & c' - \frac{a'}{a}c \end{array}$$

si ottiene $b' - \frac{a'}{a}b \neq 0$

e dunque se $ab' - a'b \neq 0$. Un modo tradizionale di denotare tale condizione è d'usare i determinanti: posto

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

la condizione di esistenza di una soluzione unica è

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$$

Se, invece, $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0$, la seconda riga dei coefficienti si annulla ed il sistema ammette (infinite) soluzioni se e solo se $c' - \frac{a'}{a} c = 0$ e cioè se

$$\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = 0$$

Nel caso in esame, la condizione sui coefficienti diventa

$$\begin{vmatrix} |u|^2 & -uv \\ uv & -|v|^2 \end{vmatrix} \neq 0$$

e cioè $$|u|^2 |v|^2 \neq (uv)^2$$

Dalla teoria risulta che nella disuguaglianza di Schwartz vale l'uguaglianza se e solo se u e v sono l'uno multiplo dell'altro e dunque $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}$ tale che

$$u = \alpha v.$$

Se le rette sono incidenti o sghembe, tale condizione non può verificarsi e dunque

<u>**Se le rette sono incidenti o sghembe il sistema ha soluzione unica e dunque esiste un'unica coppia di punti di minima distanza.**</u>

Se invece le rette sono parallele o coincidenti allora la condizione $u = \alpha v$ è verificata. Sostituendo nel sistema si ottiene

$$
\left(\begin{array}{cc|c}
\alpha^2|v|^2 & -\alpha|v|^2 & \alpha(y_0-x_0)v \\
\alpha|v|^2 & -|v|^2 & (y_0-x_0)v
\end{array}\right)
$$

e dunque la seconda equazione è ottenuta dalla prima dividendo per α (che è non nullo perché tale è u). Dunque, non solo i coefficienti della seconda equazione si annullano, ma si annulla anche il termine noto e la seconda equazione può essere soppressa.

L'equazione rimanente avrà infinite soluzioni, in quanto nessuno dei coefficienti (essendo $u=\alpha v$) è nullo, ed in ogni caso esisteranno coppie di minima distanza.

Osserviamo, ad evitare d'essere dileggiati, che se le rette sono incidenti, la coppia di punti (coincidenti) di minima distanza (nulla) si ottiene scegliendo su ciascuna retta il punto d'intersezione. Ancora meglio se sono coincidenti: in tal caso ogni punto di ciascuna retta appartiene anche all'altra ed, insieme, costituiscono una coppia di punti di minima distanza (nulla).

Riassumendo:

- <u>Per ogni coppia di rette esistono punti su ciascuna retta che rendono minima la loro distanza reciproca.</u>

- Se le rette sono incidenti, la coppia è costituita da due "copie" del punto comune alle due rette.

- Se le rette sono sghembe, la coppia di punti di minima distanza è unica e la loro distanza è non nulla.

- Se le rette sono parallele o coincidenti, ci sono infinite coppie di punti di minima distanza, nulla se le rette sono coincidenti e non nulla se sono parallele.