ESISTENZA DELL' INVERSA DI UNA MATRICE.

(Placido Longo 1/12/2018)

Lo scopo di questo contributo è di semplificare, sempre che si abbia qualche familiarità con somma diretta e complemento ortogonale, una nota precedente sull'importante proprietà per la quale una matrice quadrata che ha le colonne indipendenti ha anche le righe indipendenti, e viceversa. Come importante applicazione, verrà provato che se esiste l'inversa destra di una matrice allora esiste anche la sinistra (e, di conseguenza, sono uguali), e viceversa. Alla base di tutto c'è un'osservazione elementare su due modi diversi di scrivere in forma vettoriale i sistemi lineari omogenei.

Infatti, al sistema lineare omogeneo (quadrato)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases},$$

si può dare tanto la forma $\sum_1^n x_i A_i = 0$, che usa le colonne

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad i = 1..n,$$

quanto l'altra , che usa il prodotto scalare e le righe

$$A^i = (a_{i1}\ a_{i2}\ \ldots\ a_{in}) \in \mathbb{R}^n \quad i = 1..n,$$

$$\begin{cases} A^1 x = 0 \\ A^2 x = 0 \\ \vdots \\ A^n x = 0 \end{cases} \qquad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

tutte equivalenti (o, meglio, identiche).

Ne segue che $x = (x_1, \dots, x_n)$ è soluzione di $\sum_1^n x_i A_i = 0$ se e solo se

$$x \in \langle A^1, A^2, \dots, A^n \rangle^{\perp}$$

TEOREMA: Data $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, le sue colonne $A_1, \dots, A_n$ sono indipendenti se e solo se lo sono le righe $A^1, \dots, A^n$.

DIM. Infatti,

$A_1, .., A_n$ indipendenti

$$\Updownarrow \text{(definizione)}$$

$\sum_1^n x_i A_i = 0$ ha solo la soluzione $x = (x_1, .., x_n) = (0, .., 0)$

$$\Updownarrow \text{(osservazione precedente sui sistemi lineari)}$$

$$\langle A^1, \dots, A^n \rangle^\perp = \{0\}$$

Poiché, per il teorema della decomposizione ortogonale, si ha $\mathbb{R}^n = \langle A^1, .., A^n \rangle \oplus \langle A^1, \dots, A^n \rangle^\perp$, dal teorema sulla dimensione della somma diretta segue che

$$n = \dim \mathbb{R}^n = \dim \langle A^1, .., A^n \rangle + \underbrace{\dim \langle A^1, .., A^n \rangle^\perp}_{=0} = \dim \langle A^1, .., A^n \rangle .$$

Dunque, $\langle A^1, \dots, A^n \rangle$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ di dimensione n, da cui $\langle A^1, \dots, A^n \rangle = \mathbb{R}^n$; per il teorema dei generatori, $A^1, \dots, A^n$ sono indipendenti.

Per provare che l'indipendenza delle righe implica quella delle colonne, si può ripercorrere la dimostrazione all'incontrario oppure (meglio) applicare il teorema già provato alla matrice A^*, che ha righe e colonne scambiate rispetto ad A. $\blacksquare$

Rivolgiamo ora la nostra attenzione alle applicazioni (teoriche).
I risultati seguenti forniscono criteri d'esistenza dell'inversa di una matrice $A = (A_1\ A_2 \dots A_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

TEOREMA: <u>l'equazione</u> $AX = I$ <u>ha una e una sola soluzione</u> (<u>l'inversa destra</u>) <u>se e solo se le colonne</u> $A_1, \dots, A_n$ <u>sono indipendenti</u>.

DIM.

Detta $X_1, \ldots, X_n$ le colonne della matrice incognita X, e detti $e_1 \ldots e_n$ i vettori della base canonica (e cioè le colonne della matrice identica in $\mathbb{R}^{n \times n}$) risulta

$$A(X_1 \ldots X_n) = (AX_1 \ldots AX_n) = (e_1 \ldots e_n),$$

e dunque le colonne X_i risolvono i sistemi lineari

$$AX_i = e_i, \quad i = 1 \ldots n.$$

Osserviamo, in vista del calcolo dell'inversa – anche se non è necessario per la dimostrazione – che, avendo i coefficienti in comune, gli n sistemi lineari $Ax = e_i$ possono essere risolti simultaneamente, applicando l'algoritmo di Gauss-Jordan al sistema con termini noti multipli $A^1 \ldots A^n \mid e_1 \ldots e_n$.

Perché tutti i sistemi abbiano soluzione, occorre e basta che tutti i vettori $e_1 \dots e_n$ stiano in $\langle A_1, \dots, A_n \rangle$ e dunque

$$\mathbb{R}^n = \langle e_1, \dots, e_n \rangle \subseteq \langle A_1, \dots, A_n \rangle$$

Per il teorema dei generatori, essendo $A_1, \dots A_n$ n generatori di uno spazio di dimensione n, sono indipendenti. Viceversa, se sono indipendenti (essendo in numero pari alla dimensione di $\mathbb{R}^n$), per il teorema dei generatori generano tutto $\mathbb{R}^n$, e dunque il loro span contiene $e_1, \dots, e_n$. Le soluzioni degli n sistemi precedenti sono poi uniche per l'indipendenza di $A_1, \dots, A_n$.

$\blacksquare$

TEOREMA: Nelle stesse ipotesi di indipendenza delle colonne, la matrice A possiede inversa sinistra Y, tale che $YA = I$.

Dim.

Prendendo la trasposta di ambo i membri di $YA=I$ si ottiene $(YA)^*=I^*$, e cioè $A^*Y^*=I$.

Per il teorema sull'indipendenza di righe e colonne, visto che le colonne di A sono indipendenti, lo sono anche le sue righe che, a loro volta, coincidono con le colonne di A^*. Dal teorema appena provato, segue allora che esiste un'unica Z tale che $A^*Z=I$ e, posto $Y=Z^*$, si ha infine $A^*Y^*=A^*Z^{**}=A^*Z=I$. Dunque, la matrice $Y=Z^*$ è l'inversa sinistra richiesta, unica perché tale è Z. $\blacksquare$

Si noti che, da $Y=YI=Y(AX)=(YA)X=IX=X$, segue che le inverse destra e sinistra, quando esistano entrambe, coincidono.

Poiché, dal teorema precedente, si ha che o esistono entrambe o non esistono, ne segue che non ha più senso distinguerle: verranno denotate entrambe col simbolo classico

$$\boxed{A^{-1}}$$

sicché $\boxed{AA^{-1} = A^{-1}A = I}$, la condizione necessaria e sufficiente perché A^{-1} esista è che le colonne (o le righe) di A siano indipendenti (e quindi sono anche generatori e basi di $\mathbb{R}^n$).

Diversamente da quanto accade per i numeri, per i quali l'unico elemento non invertibile è lo zero, le matrici non invertibili sono molto numerose: basta che una colonna (o una riga) sia combinazione delle altre.

Concludiamo con un briciolo di terminologia "ufficiale".

DEFINIZIONE: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ si dice **REGOLARE** (o **INVERTIBILE**) se le sue colonne sono indipendenti. Si dice **SINGOLARE** (o **DEGENERE**), altrimenti.

Grazie al teorema dei generatori e alle sue conseguenze, si possono adottare definizioni alternative (le righe o le colonne siano basi, o generatori di $\mathbb{R}^n$ etc), tutti equivalenti.
La definizione qui adottata suggerisce subito come verificare in pratica se A sia regolare o singolare: basta ridurla a scala, e verificare se se la matrice ottenuta così risulti triangolare (A regolare), o ci siano colonne "non pivot" (A singolare): ragionevolmente rapido! La deter=minazione dell'inversa, invece, richiede di applicare l'algoritmo di Gauss e Jordan al sistema $A_1 .. A_n | e_1 .. e_n$. A parte le consuete precauzioni in caso di permutazioni di colonne, l'inversa si troverà al secondo membro.

Concludiamo con i due seguenti

ESEMPI:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ è regolare o singolare? Se è regolare, qual è la sua inversa? Iniziamo permutando le colonne x_1 e x_3.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{x_1 \leftrightarrow x_3} \begin{array}{c|ccc|ccc} & x_3 & x_2 & x_1 & & & \\ \mathrm{I} & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \mathrm{II} & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \mathrm{III} & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad \mathrm{III} - \mathrm{II}$$

$$\begin{array}{c|ccc|ccc} \mathrm{III} & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}$$

Il sistema è triangolare (tre pivot), e dunque le colonne originali sono indipendenti. Ne segue che la matrice è <u>regolare</u>.

Per calcolare l'inversa, proseguiamo con l'algoritmo di Gauss-Jordan

$$
\longrightarrow
\begin{array}{c|ccc|ccc|l}
 & x_3 & x_2 & x_1 & & & & \\
\mathrm{I} & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & \mathrm{I} - \mathrm{III} \\
\mathrm{II} & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \mathrm{II} - \mathrm{III} \\
\mathrm{III} & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & \\
\mathrm{II} & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & \mathrm{I} - 2\mathrm{II} \\
\mathrm{I} & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & -1 & \mathrm{I} - 2\mathrm{II} \\
\mathrm{I} & 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 &
\end{array}
$$

La prima riga della matrice inversa conterrà i valori trovati per x_1. Ricerchiamo nella colonna x_1 il valore 1: si troverà su una unica riga da cui ricavare, al secondo membro, i valori 0, −1, 1.

Ripetendo per x_2 e x_3, si ottengono rispettivamente la seconda e la terza riga dell'inversa, che risulterà quindi

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

A titolo d'esercizio, calcoliamo AA^{-1} e verifichiamo che vale I. Infatti,

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 0 + 2\cdot 0 + 1\cdot 1 & 1\cdot(-1) + 2\cdot 2 + 1\cdot(-3) & 1\cdot 1 + 2(-1) + 1\cdot 1 \\ 1\cdot 0 + 1\cdot 0 + 0\cdot 1 & 1\cdot(-1) + 1\cdot 2 + 0(-3) & 1\cdot 1 + 1(-1) + 0\cdot 1 \\ 2\cdot 0 + 1\cdot 0 + 0\cdot 1 & 2(-1) + 1\cdot 2 + 0(-3) & 2\cdot 1 + 1\cdot(-1) + 0\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Come ulteriore esempio, si consideri $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Riduciamo a scala la matrice, con secondo membro $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$
\begin{array}{ll|rrr|rrr}
 & \mathrm{I} & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
\mathrm{II}-\mathrm{I} & \mathrm{II} & 1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
\mathrm{III}-\mathrm{I} & \mathrm{III} & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 & \mathrm{II} & 0 & 2 & -2 & -1 & 1 & 0 \\
\mathrm{III}-\frac{1}{2}\mathrm{II} & \mathrm{III} & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\
 & \mathrm{III} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1
\end{array}
$$

e cioè

$$
\left(\begin{array}{rrr|rrr}
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 2 & -2 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1/2 & -1/2 & 1
\end{array}\right)
$$

Poiché per qualcuno dei secondi membri (per tutti e tre, in effetti) la terza equazione, e il sistema, sono insolubili, A è <u>singolare</u>.

NOTA sulle matrici rettangolari. Sia $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e si consideri il sistema dell'inversa destra $AX = I$, e cioè $A_1 \dots A_n | e_1 \dots e_m$, $e_i \in \mathbb{R}^m$. Perché abbia soluzioni per ogni e_i (e quindi per ogni $b \in \mathbb{R}^m$) occorre e basta che sia $\dim \langle A_1, \dots, A_n \rangle = m$ da cui, per il teorema sul massimo numero di vettori indipendenti, deve essere $n \geq m$. D'altronde, se si vuole che la soluzione sia unica, occorre che $A_1, \dots, A_n$ siano indipendenti e, per lo stesso risultato, sarà $n \leq m$, da cui risulta $n = m$. Dunque, considerare matrici quadrate è necessario, se si ha in mente l'esistenza e l'unicità per le equazioni $AX = XA = I$. Esistono generalizzazioni del concetto di matrice inversa, fra le quali la "pseudoinversa di MOORE-PENROSE" A^+, che esiste unica anche per le matrici rettangolari, ma verifica solo una versione modificata delle equazioni precedenti; viene utilizzata, ad esempio, per risolvere il problema dei "minimi quadrati". Una "ricetta" rapida per calcolare

A^+b è di:

1) Proiettare b sullo span delle colonne $A_1, .. A_n$, ottenendo $\bar{b}$ (unico);
2) determinare lo spazio affine $x_0 + X$ delle soluzioni di $Ax = \bar{b}$;
3) calcolare A^+b come (l'unica) proiezione di 0 su $x_0 + X$.

Tutte operazioni abbastanza agevoli! In sostanza, si prende il valore $\bar{b}$, più vicino a quello dato b, fra quelli per cui $Ax = \bar{b}$ è risolubile e, di tutte le soluzioni di tale sistema si sceglie come A^+b quella di norma minima: in certo senso è la cosa più simile alla soluzione di $Ax = b$! Fino a che punto A^+ sia un ragionevole rimpiazzo per A^{-1} dipende dalle proprietà di A e, per gli approfondimenti, occorre fare riferimento ai testi avanzati di Algebra Lineare; qualcosa è reperibile anche in rete.