ESEMPI DI RISOLUZIONE DI SISTEMI LINEARI.

Consideriamo il sistema

$$\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\ \hline 2 & 1 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2 \end{array} \longrightarrow$$

Prima di procedere osserviamo che la colonna col maggior numero di zeri è quella di x_5. Scambiamola con la prima (quella di x_1) per trarne vantaggio

$$\xrightarrow{x_1 \leftrightarrow x_5} \begin{array}{ccccc|c} x_5 & x_2 & x_3 & x_4 & x_1 & \\ \hline 2 & 1 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{array} \longrightarrow$$

Nella I colonna (quella di x_5) c'è un coefficiente uguale a 1 (1 e -1 sono i PIVOT ideali per il calcolo che segue). Permutiamo le prime due righe

$$\xrightarrow{\mathrm{II} \leftrightarrow \mathrm{I}} \quad \begin{array}{ccccc|c} x_5 & x_2 & x_3 & x_4 & x_1 & \\ \hline 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{array} \quad \longrightarrow$$

Sottraendo dalla II il doppio della I

$$\xrightarrow{\mathrm{II} - 2\mathrm{I}} \quad \begin{array}{ccccc|c} x_5 & x_2 & x_3 & x_4 & x_1 & \\ \hline 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{array} \quad \longrightarrow$$

Sommando alla III la terza parte di II

$$\xrightarrow{\mathrm{III} + \frac{1}{3}\mathrm{II}} \quad \begin{array}{ccccc|c} x_5 & x_2 & x_3 & x_4 & x_1 & \\ \hline 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

Il sistema è a scala con PIVOT x_5 x_2 x_3

Portando a secondo membro le colonne (non PIVOT) x_1 e x_4, si ottiene un sistema triangolare con termini diagonali tutti non nulli, con soluzione unica per ogni scelta (arbitraria) di parametri x_1 e x_4.

$$\begin{cases} x_5 + 2x_2 + 2x_3 = 2 - 3x_4 - x_1 \\ \qquad -3x_2 = -3 + 3x_4 \\ \qquad\qquad 2x_3 = 1 - x_4 - x_1 \end{cases}$$

Procedendo dall'ultima equazione alla prima per sostituzione all'indietro, ossia ricavando x_2 e x_3 dalle ultime due equazioni e sostituendo i valori trovati nella prima, si ottiene

$$x_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_4$$

$$x_2 = 1 - x_4$$

$$\begin{aligned} x_5 &= 2 - 3x_4 - x_1 - 2(1 - x_4) - 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_4\right) = \\ &= \cancel{2} - \cancel{3x_4} - \cancel{x_1} - \cancel{2} + \cancel{2x_4} - 1 + \cancel{x_1} + \cancel{x_4} = \\ &= -1 \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 - x_4 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_4 \\ x_4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'algoritmo di eliminazione può essere applicato in modo molto flessibile. Un diverso modo di procedere è il seguente.

$$
\begin{array}{ccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\
\hline
2 & 1 & 4 & 3 & 2 & 1 \\
1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 2 \\
1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2
\end{array}
\xrightarrow[\text{ignorando lo zero}]{\mathrm{II} \leftrightarrow \mathrm{I}}
\begin{array}{ccccc|c}
\multicolumn{5}{c}{\text{idem}} & \\
\hline
1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 2 \\
2 & 1 & 4 & 3 & 2 & 1 \\
1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2
\end{array}
\longrightarrow
$$

$$
\xrightarrow[\mathrm{III} - \mathrm{I}]{\mathrm{II} - 2\mathrm{I}}
\begin{array}{ccccc|c}
\hline
1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 2 \\
0 & -3 & 0 & -3 & 0 & -3 \\
0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0
\end{array}
$$

Visto che c'è la terza colonna con lo stesso numero e la stessa posizione di zeri della prima, si può spostarla al posto della seconda

$$
\xrightarrow{x_2 \leftrightarrow x_3}
\begin{array}{ccccc|c}
x_1 & x_3 & x_2 & x_4 & x_5 & \\
\hline
1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 2 \\
0 & 0 & -3 & -3 & 0 & -3 \\
0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0
\end{array}
\longrightarrow
$$

si potrebbero scambiare II e III riga per utilizzare -1 come PIVOT, ma va altrettanto bene -3

$$\xrightarrow{\mathrm{III}-\frac{1}{3}\mathrm{II}}\quad
\begin{array}{ccccc|c}
x_1 & x_3 & x_2 & x_4 & x_5 & \\
\hline
1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 2 \\
0 & 0 & -3 & -3 & 0 & -3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1
\end{array}$$

che è "a scale" e può essere risolto adoperando come PIVOT x_5, una qualunque fra x_1 e x_3 ma non entrambe, ed una qualunque fra x_2 e x_4 ma non entrambe. Nulla vieta, infatti, di scegliere un PIVOT diverso, all'interno di ogni "gradino", permutando la colonna attuale con quella del PIVOT desiderato.

ESERCIZI DA SVOLGERE

$$\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & 2 & 1 & 3 \\
1 & 0 & 3 & 1 \\
2 & 1 & 5 & 3
\end{array}\right)
\qquad
\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & 0 & 1 & 2 \\
1 & 2 & 3 & 4 \\
1 & 1 & 2 & 2
\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & 2 & 1 & 3 \\
2 & 0 & -2 & 2 \\
1 & 2 & 1 & 3 \\
1 & 1 & 0 & 2
\end{array}\right)
\qquad
\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & 3 & 2 & 4 \\
3 & 9 & 6 & 12 \\
2 & 6 & 4 & 8
\end{array}\right)$$

ALTRI ESEMPI

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{III}-\text{I}]{\text{II}-2\text{I}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 1 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\text{IV}+\text{II}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\text{IV}-2\text{III}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Ultima equazione e sistema IMPOSSIBILI

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \end{array}$$

La colonna x_3 è formata solo da zeri: va eliminata, ma va inserito un valore arbitrario per x_3 in ogni eventuale soluzione.

La terza equazione è un'identità ($0=0$) e può essere eliminata. Il sistema diventa

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_4 & \\ \hline 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{array} \xrightarrow[\text{III}-\text{I}]{\text{II}-2\text{I}} \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_4 & \\ \hline 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

che è triangolare risolubile (diagonale senza termini nulli) da cui

$$x_4 = 0$$

$$-3x_2 = -1 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{3}$$

$$x_1 + 2x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Le infinite soluzioni del sistema originale si ottengono aggiungendo un valore arbitrario per x_3 ed hanno la forma

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \text{arbitraria} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_3 \text{ arbitraria}$$