ORTOGONALITA' ED EQUAZIONI CARTESIANE E PARAMETRICHE

Rette in $\mathbb{R}^2$

a) Rette per l'origine

L'equazione cartesiana di una retta per l'origine nel piano è $ax+by=0$

Posto $A=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ e $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ne segue subito che l'equazione diventa

$$AX=0 \quad \text{(prodotto scalare)}$$

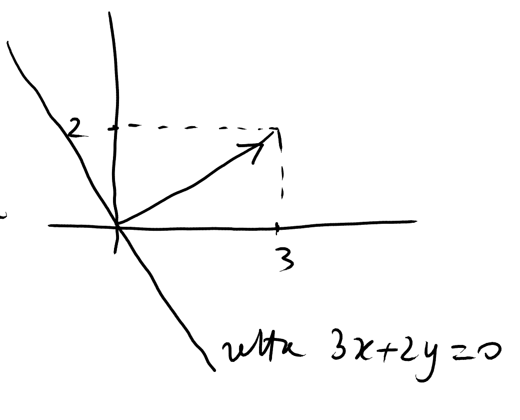
Il significato geometrico dell'equazione $AX=0$ è che la retta è formata da tutti i vettori X ortogonali al fissato vettore dei coefficienti A.

Ne segue che si può subito ricavare dall'equazione cartesiana (implicita) di una retta per l'origine la direzione normale ad essa.

Esempio

La direzione normale a $3x+2y=0$ è data dal vettore $(3,2)$

Il punto (x,y) sta sulla retta se e solo se il vettore (x,y) è ortogonale a $(3,2)$



b) Rette generiche

L'equazione generale di una retta in $\mathbb{R}^2$ è
$$ax + by = c$$
Se si interseca con la retta $ax+by=0$, si ottiene il sistema
$$\begin{cases} ax+by=c \\ ax+by=0 \end{cases}$$
che ha soluzioni se e solo se $c=0$.
Ne segue dunque che $ax+by=c$ è parallela a $ax+by=0$, e poiché (a,b) è normale ad $ax+by=0$ lo è anche ad $ax+by=c$, per ogni $c \neq 0$.
Dunque, per ogni retta in $\mathbb{R}^2$ di equazione implicita $ax+by=c$, il vettore (a,b) dei coefficienti è ortogonale alla retta data.

Esempio la direzione normale a $2x+y=7$ è $(2,1)$.
Osserviamo che se si scrive la retta nella forma $4x+2y=14$ si ottiene come vettore normale $(4,2) = 2\cdot(2,1)$.

c) Retta per un punto (x_0,y_0) ortogonale ad un vettore dato (a,b).

Lo spostamento da (x_0,y_0) ad ogni punto (x,y) della retta deve essere ortogonale ad (a,b) e dunque
$$(a,b)\,(x-x_0,\, y-y_0) = 0$$
ossia $a(x-x_0) + b(y-y_0) = 0$

d) <u>Retta perpendicolare per un punto</u> (x_0,y_0), ortogonale ad una retta data $ax+by=c$.

La direzione ortogonale alla retta è (a,b).

La retta per (x_0,y_0) nella direzione di (a,b) è

$$(x,y) = (x_0,y_0) + t(a,b)$$

Volendo l'equazione in forma implicita da

$$\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \end{cases}$$

poiché almeno uno fra a e b è non nullo (altrimenti $0x + 0y = c$ non rappresenta in nessun caso, $c=0$ o $c \neq 0$, una retta), scelto uno (e sia a, per semplicità) si ha dalla prima equazione $t = \frac{x-x_0}{a}$, e sostituendo nella seconda, si ottiene

$$y = y_0 + \frac{x-x_0}{a} b$$

da cui

$$b(x-x_0) - a(y-y_0) = 0$$

ovvero

$$bx - ay = bx_0 - ay_0$$

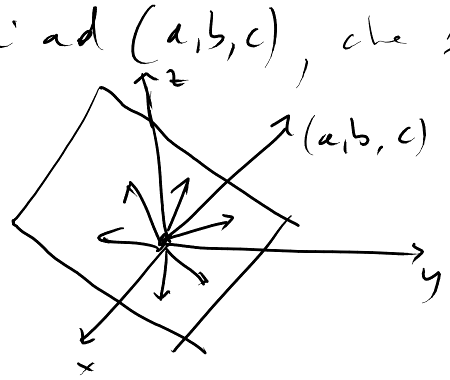
Il problema di trasformare le equazioni implicite in quelle parametriche sarà l'oggetto della prossima settimana.
Osserviamo invece che avremmo potuto ottenere l'equazione richiesta ragionando così: se due rette sono ortogonali lo sono anche le loro direzioni normali. Dunque, se

(a,b) è ortogonale alla retta data il vettore $(b,-a)$, che verifica $(b,-a)(a,b) = ab-ab=0$, è ortogonale ad (a,b) ed è dunque il vettore dei coefficienti di una retta perpendicolare a quella data. Dovendo poi passare per (x_0,y_0) la retta richiesta è

$$b(x-x_0) - a(y-y_0) = 0$$

2) Piani in $\mathbb{R}^3$

Le considerazioni precedenti si estendono agevolmente ai piani in $\mathbb{R}^3$. Infatti $ax+by+cz=0$ esprime che (x,y,z) è ortogonale a (a,b,c) e dunque le soluzioni di $ax+by+cz=0$ sono le componenti di tutti e soli i vettori ortogonali ad (a,b,c), che formano un piano per l'origine



(a,b,c) è normale a tutti gli spostamenti dall'origine, che sta sul piano ad ogni altro punto.

Analogamente a quanto già visto $ax+by+cz=d$ è un piano parallelo ad $ax+by+cz=0$ e dunque

a) $\boxed{\text{Un vettore normale al piano } ax+by+cz=d \text{ è dato da } (a,b,c)}$

Il piano per (x_0,y_0,z_0) normale a (a,b,c) è

b) $$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

c) La retta (parametrica) normale al piano $ax+by+cz=d$ e passante per (x_0, y_0, z_0) è

$$(x,y,z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a,b,c)$$

A titolo d'applicazione scriviamo l'equazione implicita del piano parallelo ad $ax+by+cz=d$ per il punto (x_0,y_0,z_0). Poiché i piani sono paralleli hanno la stessa direzione normale e dunque gli stessi coefficienti a, b, c. Il passaggio per (x_0, y_0, z_0) si ottiene così

d) $$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$$

<u>Esempi</u>

Il piano per $(1,2,1)$ ortogonale a $(2,3,1)$ è

$$2(x-1) + 3(y-2) + (z-1) = 0$$

I piani $ax+by+cz=d$ e $a'x+b'y+c'z=d'$ sono paralleli se i vettori normali (a,b,c) e (a',b',c') sono paralleli, cioè se $\exists \lambda$: $a=\lambda a'$, $b=\lambda b'$ e $c=\lambda c'$.
Dunque $2x+y-z=3$ è parallelo a $4x+2y-2z=7$ (non escludendo che possano coincidere). Per essere coincidenti, avendo la stessa direzione normale, basta che abbiano un punto in comune (unicità del piano normale ad una direzione per un punto). Ora $(0,3,0)$ è soluzione di $2x+y-z=3$, ma <u>non</u> lo è di $4x+2y-2z=7$ e dunque sono paralleli.

e) Piani ortogonali

Due piani $ax+by+cz=d$ e $a'x+b'y+c'z=d'$ sono ortogonali se lo sono le loro direzioni normali (a,b,c) e (a',b',c') e cioè se

$$\boxed{aa'+bb'+cc'=0}$$

3) Conversione da forma parametrica ad implicita e viceversa

A seconda del problema può essere più agevole adoperare l'una forma o l'altra, e può dunque essere necessario trasformare l'equazione da un tipo all'altro.

a) Retta in $\mathbb{R}^3$

Parametrica → Cartesiana

La strategia consiste nell'eliminare il parametro.

$$\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases} \xRightarrow{a \neq 0} t = \frac{x-x_0}{a} \Rightarrow \begin{cases} y = y_0 + \frac{x-x_0}{a} b \\ z = z_0 + \frac{x-x_0}{a} c \end{cases}$$

da cui, infine

$$\begin{cases} a(y-y_0) - b(x-x_0) = 0 \\ a(z-z_0) - c(x-x_0) = 0 \end{cases}$$

Il sistema così ottenuto rappresenta la retta come intersezione di due piani, uno ortogonale a $(-b,a,0)$ e l'altro a $(-c,0,a)$.

Cartesiana → Parametrica

In tal caso la retta è definita con una coppia di piani intersecantisi:

$$\begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \end{cases}$$

Poiché la retta giace su entrambi i piani, gli spostamenti lungo di essa saranno ortogonali ai vettori normali ad entrambi i piani (a,b,c) e (a',b',c').

Un modo agevole per ottenere un vettore normale ad altri due è di considerare il loro prodotto esterno $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$, che sarà la direzione della retta. Per ottenerne l'equazione parametrica, avendo già la direzione, basta determinare un punto per cui passa e cioè una soluzione x_0, y_0, z_0 del sistema che definisce la retta. Infine

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$$

<u>Esempio</u>

La retta $\begin{cases} x+y=1 \\ x+2y+z=3 \end{cases}$ ha direzione normale ad entrambi i vettori $(1,1,0)$ e $(1,2,1)$, e dunque è diretta come

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Determiniamo una qualunque soluzione del sistema (risolvendolo, se occorre, con l'algoritmo di Gauss).

In questo caso basta porre $x=0$, ricavare $y=1$ dalla prima equazione e poi $z = 3-x-2y = 1$ dalla seconda. Dunque un'equazione parametrica della retta è $(x,y,z) = (0,1,1) + t(1,-1,1)$

ovvero
$$\begin{cases} x = t \\ y = 1-t \\ z = 1+t \end{cases}$$

b) Piani in $\mathbb{R}^3$

Parametrica $\to$ Cartesiana

Sia $x = x_0 + su + tv$ $s,t \in \mathbb{R}$ un piano in forma parametrica

Per ricavarne l'equazione implicita, basta osservare che un vettore normale al piano (le componenti del quale saranno i coefficienti dell'equazione) deve di necessità essere normale sia allo spostamento u che a quello v e dunque può come prima essere ottenuto considerando $u \wedge v$. Il punto di passaggio è x_0.
Scrivendo tutto in forma scalare si ha

$$\begin{cases} x = x_0 + su_1 + tv_1 \\ y = y_0 + su_2 + tv_2 \\ z = z_0 + su_3 + tv_3 \end{cases}$$

e detto $(w_1, w_2, w_3) = (u_1, u_2, u_3) \wedge (v_1, v_2, v_3)$
l'equazione è $w_1(x-x_0) + w_2(y-y_0) + w_3(z-z_0) = 0$

Cartesiane → Parametriche

Dato il piano $ax+by+cz=d$ si sceglie uno dei coefficienti non nulli (e.g. a). Allora

$$x = \frac{d}{a} - \frac{b}{a}y - \frac{c}{a}z$$

che è equivalente a

$$\begin{cases} x = \frac{d}{a} - \frac{b}{a}s - \frac{c}{a}t \\ y = s \\ z = t \end{cases}$$

che a sua volta equivale alla forma vettoriale

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d/a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -b/a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -\frac{c}{a} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

<u>Esempio</u>

Il piano $2x+y+z=1$ può scriversi

$$x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z$$

e dunque le equazioni parametriche (scalari) sono

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}t \\ y = s \\ z = t \end{cases}$$

Il piano $y+z=3$ può scriversi

$$y = 3 - z$$

ovvero

$$\begin{cases} x = s \\ y = 3-t \\ z = t \end{cases}$$ o anche $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nota: Così come le equazioni implicite sono ben lungi dall'essere uniche, lo stesso accade, e a maggior ragione, per quelle parametriche.
La prima bisettrice, ad esempio, può essere rappresentata da entrambe le equazioni

$$\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$$

e da infinite altre.
L'equazione cartesiana di un piano in $\mathbb{R}^3$ determina, a meno di una costante moltiplicativa, la sua direzione normale, che è unica. Quella parametrica è individuata da un primo spostamento, dall'origine ad un suo punto qualunque, più altri due sul piano, arbitrari se non per il fatto che non devono essere allineati.
La prossima sezione tratterà delle posizioni reciproche di rette e piani mediante la soluzione di sistemi lineari opportuni. Prima di lanciarsi nella mischia brandendo l'algoritmo di Gauss, vale la pena di riconvertire la forma parametrica in quella cartesiana: due piani cartesiani sono uguali (coincidenti) se sono paralleli (vettori normali multipli) ed hanno un punto comune (basta scegliere una soluzione a caso della prima e sostituirla nella seconda).