LA CONVENZIONE DI EINSTEIN

(21/12/2016)

In questa nota breve verranno presentate alcune prove semplificate di risultati contenuti nelle dispense sul cambio di base e sulla matrice associata. Verrà impiegata costantemente la convenzione di Einstein, nella versione di LEV LANDAU: indici ripetuti sottintendono una somma al variare di quegli indici fra tutti i valori possibili.

ESEMPIO: $a, b \in \mathbb{R}^n$ $\quad a_i b_i \equiv \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ (i ripetuto varia fra 1 ed n)

Un effetto pratico fonte di qualche confusione, almeno nelle fasi iniziali dell'impiego della convenzione di Einstein (-Landau) è che, mentre $a_i b_i$ e $a_j b_j$, senza la somma sottintesa, hanno valori dipendenti da i e j, e possono essere diversi, ciò non accade se si conviene di sottintenderla, poiché assumono lo stesso valore $a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$; dunque, $a_ib_i = a_jb_j = a_nb_n$ e così via. Tenerne conto in tutti gli esempi seguenti.

DEFINIZIONE: Date $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, si definisce $AB \in \mathbb{R}^{m \times p}$ ponendo:

$$(AB)_{ij} = A_{ih}B_{hj} \qquad \forall i = 1..m \quad \forall j = 1..p$$

Il secondo membro è, in realtà, $\sum_{h=1}^{n} A_{ih}B_{hj}$, con i e j fissati ai valori indicati al primo membro, mentre h varia assumendo tutti i valori disponibili (colonne di A = righe di B, che sono gli interi da 1 ad n). Occorre notare che A_{ih} e B_{hj} sono scalari e il loro prodotto è commutativo, oltre che associativo e distributivo. La definizione precedente potrebbe ugualmente essere scritta nella forma (corretta)

$$(AB)_{ij} = B_{hj}A_{ih}$$

Invece, $(BA)_{ij} = B_{ih} A_{hj}$ e, in tal caso, l'indice ripetuto scorre le colonne di B e le righe di A, all'opposto di quanto accade per AB. In presenza di prodotti di matrici espressi nelle componenti scalari, non è insolito che l'ordine delle matrici sia diverso da quello atteso, perché ciò che conta è l'ordine degli indici accoppiati di riga e colonna.

MATRICE ASSOCIATA ALLE FUNZIONI COMPOSTE

Sia $\mathcal{A}: X \to Y$ e $\mathcal{B}: Y \to Z$, e siano $e_1 \dots e_m$, $e'_1 \dots e'_n$, $e''_1 \dots e''_p$ delle basi di X, Y e Z rispettivamente, tutti supporti di dimensione finita e non nulla. Sia A la matrice associata ad $\mathcal{A}$ e alle basi di X e Y fissati, e B quella relativa a $\mathcal{B}$ e alle basi di Y e Z.

Proveremo che:

La matrice associata a $x \to \mathcal{B}(\mathcal{A}(x))$ e alle basi di X e Z è la matrice prodotto BA.

Infatti, per determinare la matrice associata all'applicazione composta calcoliamo le immagini dei vettori della base del dominio $e_1 \dots e_m$ e determiniamone le coordinate rispetto alla base del codominio $e''_1 \dots e''_p$. Si ha, fissato $i = 1 \dots m$,

$$\mathcal{B}(\mathcal{A}(e_i)) \underset{\substack{\text{def. di} \\ \mathcal{A}}}{=} \mathcal{B}(A_{ji}\, e'_j) \underset{\substack{\text{linearità} \\ \text{di } \mathcal{B}}}{=} A_{ji}\, \mathcal{B}(e'_j) \underset{\substack{\text{def. di} \\ B}}{=} A_{ji}\, B_{kj}\, u''_k$$

ne segue subito che $A_{ji} B_{kj} = (BA)_{ki}$ è la coordinata rispetto a u''_k dell'elemento che $x \to \mathcal{B}(\mathcal{A}(x))$ associa a $x = e_i$. Notando che i è l'indice di <u>colonna</u>, ne segue subito che BA è la matrice associata cercata.

$\blacksquare$

Si verifica subito, allo stesso modo, che l'applicazione identica $\mathcal{I}: X \to X$ definita ponendo $\mathcal{I}(x) = x$ ha associata la matrice identica I e, nel caso che A sia invertibile, anche che A^{-1} è associata all'applicazione inversa $\mathcal{A}^{-1}$, in conseguenza del risultato precedente.

CAMBI DI BASE

Ricordiamo che, se $e_1 \dots e_n$ ed $e'_1 \dots e'_n$ sono due basi di X, si definisce la matrice di cambio di base M ponendo $e'_i = M_{ji}\, e_j$.

Supposto che $e_h = N_{kh}\, e'_k$ si ottiene subito

$$e'_i = M_{ji}\, e_j = M_{ji} N_{kj}\, e'_k$$

NEL DUBBIO, USARE INDICI DIVERSI!

Poiché $e'_1 \dots e'_n$ formano una base, dall'unicità delle coordinate dei due membri (uguali) rispetto ad $e'_1 \dots e'_n$ segue

$$M_{ji} N_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{se } k = i \\ 0 & \text{se } k \neq i \end{cases}$$

e dunque, poiché $M_{ji} N_{kj} = (NM)_{ki}$ ne segue subito $NM = I$; dunque, N ed M sono l'una inversa dell'altra.

CAMBIO DI COORDINATE

Detti $x_1 \dots x_n$ ed $x'_1 \dots x'_n$ i due sistemi di coordinate di x rispetto alle due basi precedenti, si ha $x_i e_i = x = x'_j e'_j = x'_j M_{kj} e_k$

Dall'unicità delle coordinate rispetto alla base $e_1 \dots e_n$, i coefficienti di e_i al primo membro (x_i) e al secondo membro ($k=i$, $x'_j M_{ij}$) devono coincidere, e dunque

$$x_i = M_{ij}\, x'_j \qquad i = 1..n$$

e cioè

$$x = M x' \quad \text{(prodotto matrice per vettore)}$$

La bizzarria del fatto che la matrice che "trasforma" la base $e_1 \dots e_n$ in quella $e'_1 \dots e'_n$ trasforma anche le coordinate "nuove", rispetto a $e'_1 \dots e'_n$, nelle altre "vecchie", rispetto a $e_1 \dots e_n$ ha indotto gli studiosi a definire le coordinate come "CONTROVARIANTI".

Moltiplicando la relazione $x = Mx'$ a sinistra per M^{-1} si ottiene la trasformazione

$$x' = M^{-1} x \quad \text{ovvero} \quad x'_j = M^{-1}_{jk}\, x_k$$

che muta le coordinate "vecchie" in quelle nuove.

Un'applicazione di tutti i risultati esposti sinora è la seguente formula

TRASFORMAZIONE DELLA MATRICE ASSOCIATA

Siano $\mathcal{A}: X \to Y$ lineare, $e_1 .. e_n$ ed $e'_1 .. e'_n$ basi di X, $f_1 .. f_m$ ed $f'_1 .. f'_m$ basi di Y. Siano poi A, A' le matrici associate ad $\mathcal{A}$ e alle basi $e_1 .. e_n$ ed $f_1 .. f_m$, ed a $e'_1 .. e'_n$ ed $f'_1 .. f'_m$, rispettivamente. Siano infine M ed N le matrici di cambio di base da $e_1 .. e_n$ ad $e'_1 .. e'_n$, e da $f_1 .. f_m$ ad $f'_1 .. f'_m$, rispettivamente. Allora

$$A' = N^{-1} A M$$

Infatti, per calcolare A', determiniamo le coordinate, rispetto a $f'_1 .. f'_m$, delle immagini $\mathcal{A}(e'_1) .. \mathcal{A}(e'_n)$. Si ha, dunque

$$\mathcal{A}(e'_i) \underset{\text{def di } M}{=} \mathcal{A}(M_{ji} e_j) \underset{\text{linearità}}{=} M_{ji} \mathcal{A}(e_j) \underset{\text{def. di } A}{=} M_{ji} A_{kj} f_k \underset{\text{def di } N}{=} \underbrace{M_{ji} A_{kj} N^{-1}_{hk}}_{\text{coordinate di } \mathcal{A}(e'_i) \text{ rispetto a } f'_h} f'_h$$

Di conseguenza $\quad A'_{hi} = M_{ji} A_{kj} N^{-1}_{hk} = (N^{-1} A M)_{hi}$ $\quad \blacksquare$

Il caso molto importante (teoria spettrale) in cui $X=Y$ e $e_i = f_i$, $e'_i = f'_i$, conduce alla formula

$$A' = M^{-1} A M$$

che consente di provare immediatamente l'invarianza del polinomio caratteristico e dei suoi coefficienti (invarianti spettrali) per cambio di base.

Una curiosità: cosa c'entra Einstein con queste cose? La teoria della relatività generale è basata sull'impiego della geometria non euclidea in vicinanza delle masse. La raffica di sommatorie presenti nella teoria del "Calcolo differenziale assoluto" (oggi: "Geometria Differenziale") indussero Einstein a semplificarne le notazioni. Come in altre sue creazioni note e meno note, come la teoria del moto Browniano, ebbe successo, con gran vantaggio per tutti noi!