DISTANZE E PROIEZIONI

1. Distanza fra due punti

Dati x_1 e x_2 in $\mathbb{R}^n$ allora

$$d(x_1, x_2) = |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)(x_1 - x_2)}$$

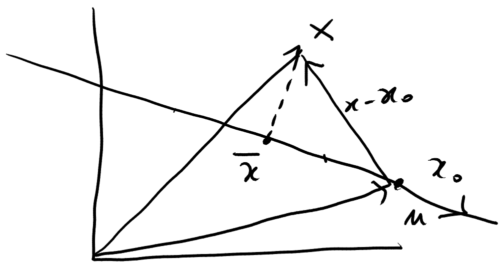
Esempio La distanza fra $(1,0,2,3)$ e $(1,1,1,2)$ è

$$\sqrt{(1-1)^2 + (0-1)^2 + (2-1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

2. Distanza di un punto da una retta

Sia x un punto e $x_0 + tu$ una retta (in $\mathbb{R}^n$)

Se si proietta il vettore $x - x_0$ lungo la direzione di u si ottiene il vettore $\bar{x} - x_0$ e la distanza richiesta è



$$|x - (\bar{x} - x_0)| = \sqrt{|x|^2 - |\bar{x} - x_0|^2}$$

Esempio

La distanza fra il punto $(1,1,1)$ e la retta $(1,2,1) + t(2,0,1)$.

$$x = (1,1,1) \qquad x_0 = (1,2,1) \qquad u = (2,0,1) \qquad |u| = \sqrt{5}$$

$$x - x_0 = (0,-1,0) \qquad (x - x_0)_u = \frac{(2,0,1)(0,-1,0)}{5}(2,0,1) =$$

$$= \frac{0}{5}(2,0,1) = (0,0,0)$$

$$\bar{x} = x_0 + (x - x_0)_u = x_0 = (1,2,1)$$

La distanza fra x e la retta r è $d(x, \bar{x})$ e cioè

$$\sqrt{(1-1)^2 + (1-2)^2 + (1-1)^2} = 1$$

3. – Proiezione su un sottospazio affine

Un sottospazio affine Σ di $\mathbb{R}^n$ è un insieme di vettori definito da $x = x_0 + \sum_1^k \alpha_i u_i \quad \alpha_i \in \mathbb{R}$.
Casi particolari sono rette e piani parametrici.
Dato un punto $\tilde{x}$, la sua proiezione su Σ è definita come il punto $\bar{x}$ tale che

$$(\tilde{x} - \bar{x})\, u_i = 0 \quad \forall i = 1 \ldots k$$

Se si considera il quadrato della distanza da $\tilde{x}$ ad un generico punto di Σ si ha

$$\left| \tilde{x} - x_0 - \sum_1^k \alpha_i u_i \right|^2 = \left| \tilde{x} - \bar{x} + \bar{x} - x_0 - \sum_1^k \alpha_i u_i \right|^2 =$$

(poiché $\bar{x} \in \Sigma$, $\bar{x} = x_0 + \sum_1^k \bar{\alpha}_i u_i$ e dunque
$\bar{x} - x_0 - \sum \alpha_i u_i = \sum_1^k (\bar{\alpha}_i - \alpha_i) u_i$ ed è dunque ortogonale a $\tilde{x} - \bar{x}$; per il Th. di Pitagora, allora)

$$= \left| \tilde{x} - \bar{x} \right|^2 + \left| \sum_1^k (\bar{\alpha}_i - \alpha_i) u_i \right|^2 \geq \left| \tilde{x} - \bar{x} \right|^2$$

da cui $\bar{x}$ è il punto di Σ di minima distanza da $\tilde{x}$.

a) Caso in cui u_i è ortonormale, ossia

$$u_i u_j = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$$

In tal caso, il punto $\bar{x}$ si può facilmente calcolare per effetto del teorema della proiezione. Infatti, dato w ed un sistema ortonormale $u_1 \ldots u_k$, posto

$$w' = \sum_{1}^{k} (w u_i) u_i \quad \left(\begin{array}{l}\text{Serie di Eulero-Fourier} \\ \text{di } w \text{ rispetto ad } u_1 \dots u_k\end{array}\right)$$

risulta

$$(w - w') u_j = w u_j - w' u_j = w u_j - \sum_{i=1}^{k} (w u_i) u_i u_j =$$

(poiché u_i è ortonormale, $u_i u_j = 0$ a meno che $i = j$ e $u_j u_j = 1$)

$$= w u_j - w u_j = 0$$

Poiché $w - w'$ è ortogonale ad ogni u_i, $i = 1 \dots k$, è ortogonale ad ogni loro combinazione lineare, per la linearità del prodotto scalare, e dunque

$$(W - W') v = 0 \quad \forall v \in \langle u_1 \dots u_k \rangle$$

Per determinare dunque $\bar{x}$, basta considerare

$w = (\tilde{x} - x_0)$ (equivale a traslare x_0 nell'origine),

proiettare $(\tilde{x} - x_0) = w$ sullo spazio generato da $u_1 \dots u_k$ ottenendo $W' = W - \sum_{1}^{k} (W u_i) u_i$ come elemento di minima distanza e sommare infine ad esso x_0 (ritraslando l'origine dei vettori in x_0).

In sostanza, la proiezione $\bar{x}$ di $\tilde{x}$ su Σ è

$$\bar{x} = x_0 + W' = x_0 + (\tilde{x} - x_0) - \sum_{1}^{k} \left[(\tilde{x} - x_0) u_i \right] u_i =$$

$$= \tilde{x} - \sum_{1}^{k} [(\tilde{x} - x_0) u_i] u_i$$

Caso in cui u_i non sono ortonormali

In tal caso non si può ottenere la proiezione ortogonale ma si può ricavare $\bar{x}$ risolvendo il sistema lineare

$$\left(\tilde{x} - x_0 - \sum \alpha_i u_i\right) u_i = 0 \qquad i = 1..k \quad (*)$$

di k equazioni nelle k incognite $\alpha_1 \dots \alpha_k$.
L'eventuale soluzione $\bar{\alpha}_1 \dots \bar{\alpha}_k$ fornisce il punto $\bar{x} = x_0 + \sum_{1}^{k} \bar{\alpha}_i u_i$ di Σ tale che $\tilde{x} - \bar{x}$ sia ortogonale a tutti gli $u_1 \dots u_k$ che, per il teorema di Pitagora, sarà il punto di Σ di minima distanza da $\tilde{x}$.
Non si può scrivere l'elegante formula precedente nel caso ortonormale. Si può sostituire al sistema $u_1 \dots u_k$ un altro ortonormale (Gram-Schmidt), ma bisogna valutare se sia preferibile eseguire l'algoritmo di ortogonalizzazione o quello di risoluzione del sistema precedente (*).

Caso particolare: la distanza di un punto da un piano.

Se il piano è in forma cartesiana il problema è più semplice perché si può subito ricavare dai coefficienti la direzione ad esso ortogonale.

Sia $ax+by+cz=d$ l'equazione del piano e (x_0,y_0,z_0) il punto dal quale determinare la distanza.
Poiché (a,b,c) è normale al piano, la retta $(x_0,y_0,z)+t(a,b,c)$ intersecherà il piano proprio nel punto di minima distanza. Basta dunque sostituire

$$x=x_0+ta \qquad y=y_0+tb \qquad z=z_0+tc$$

nell'equazione del piano e risolvere rispetto a t

$$a(x_0+ta)+b(y_0+tb)+c(z_0+tc)=d$$

e cioè

$$t(a^2+b^2+c^2)=d-ax_0-by_0-cz_0$$

da cui, poiché $a^2+b^2+c^2\neq 0$ (altrimenti $ax+by+cz=d$ non rappresenta un piano) segue

$$t=\frac{d-ax_0-by_0-cz_0}{a^2+b^2+c^2}$$

Il punto comune a piano e retta è dunque il punto corrispondente a tale valore di t, che denoteremo con $\bar{t}$. La distanza richiesta è dunque la distanza fra $A=(x_0,y_0,z_0)$ e $B=(x_0+\bar{t}a,\ y_0+\bar{t}b,\ z_0+\bar{t}c)$ e dunque

$$|A-B|=|(\bar{t}a,\bar{t}b,\bar{t}c)|=|\bar{t}|\,|(a,b,c)|=\boxed{\frac{|d-ax_0-by_0-cz_0|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

Lo stesso identico metodo può essere impiegato per calcolare la distanza fra un punto ed una retta in forma cartesiana nel piano, ottenendo per la distanza da (x_0, y_0) dalla retta $ax+by=c$ la formula

$$d = \frac{|c - ax_0 - by_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

4.– Distanza fra rette in $\mathbb{R}^3$

Le idee sviluppate nella sezione precedente consentono di studiare anche il problema di calcolare la distanza di due rette. Se le rette hanno punti comuni, la loro distanza sarà nulla. Se sono parallele o sghembe il problema è non banale.

Siano $x_0 + su$ e $y_0 + tv$ due rette sghembe, ossia senza punti in comune e con u non multiplo di v. Seguendo l'idea della sezione precedente siano $\bar{x} = x_0 + \bar{s}u$ e $\bar{y} = y_0 + \bar{t}v$ tali che $\bar{x} - \bar{y}$ sia ortogonale tanto ad u quanto a v, ossia

$$\begin{cases} (x_0 + \bar{s}u - y_0 - \bar{t}v)\,u = 0 \\ (x_0 + \bar{s}u - y_0 - \bar{t}v)\,v = 0 \end{cases}$$

e cioè

$$\begin{cases} \bar{s}|u|^2 - \bar{t}\,uv = (y_0 - x_0)u \\ \bar{s}\,uv - \bar{t}|v|^2 = (y_0 - x_0)v \end{cases}$$

Il determinante del sistema è $\begin{vmatrix} |u|^2 & -uv \\ uv & -|v|^2 \end{vmatrix} =$

$= -|u|^2|v|^2 + (uv)^2$ che è nullo se e solo se

$$|u||v| = |uv|$$

Nella disuguaglianza di Schwartz $|uv| \le |u||v|$, si verifica l'uguaglianza se e solo se i vettori u e v sono l'uno multiplo dell'altro, cosa che abbiamo escluso assumendo che le rette siano sghembe. Dunque il sistema precedente ha una soluzione unica $(\bar{s},\bar{t})$, alla quale corrispondono i punti $\bar{x}=x_0+\bar{s}u$ della prima retta e $\bar{y}=y_0+\bar{t}v$ della seconda tali che $(\bar{x}-\bar{y})u=(\bar{x}-\bar{y})v=0$.

Proveremo che i punti $\bar{x}$ e $\bar{y}$ sono i punti di minima distanza.

Infatti, dati $x=x_0+su$ e $y=y_0+tv$ sulle rette, si ha

$$|x-y|^2=|x-\bar{x}+\bar{x}-\bar{y}+\bar{y}-y|^2=$$

$$=|x_0+su-x_0-\bar{s}u+\bar{x}-\bar{y}+y_0+\bar{t}v-y_0-tv|^2=$$

$$=|(s-\bar{s})u+(\bar{t}-t)v+\bar{x}-\bar{y}|^2=$$

(per il teorema di Pitagora, essendo $\bar{x}-\bar{y}$ ortogonale ad u e v e quindi a $(s-\bar{s})u+(\bar{t}-t)v$)

$$=|(s-\bar{s})u+(\bar{t}-t)v|^2+|\bar{x}-\bar{y}|^2\geq|\bar{x}-\bar{y}|^2$$

Dunque la distanza fra le rette è $|\bar{x}-\bar{y}|$.

La retta di minima distanza è definita come la retta passante per $\bar{x}$ e $\bar{y}$ e cioè $x=\bar{x}+t(\bar{y}-\bar{x})$

Esempio

Dati le rette $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$,

esse sono incidenti o sghembe perché $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ non è multiplo di $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Il sistema

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad \text{ossia}$$

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} s=t \\ 0=t \end{array}\right\} s=t=0 \\ 1+s=t \end{cases} \qquad \text{non ha soluzione}$$

e quindi le rette sono sghembe

Il sistema dei punti di minima distanza è

$$\begin{cases} \left[\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}-t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=0 \\ \left[\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}-t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=0 \end{cases}$$

e cioè

$$\begin{cases} 2s-2t=-1 \\ 2s-3t=-1 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} t=0 \\ s=-\frac{1}{2} \end{array}}$$

da cui i punti di minima distanza sono $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=$ $=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ sulla prima retta e $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ sulla seconda.

La distanza delle rette è $|\bar{x}-\bar{y}|$ e dunque

$$\left|\left(-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)-(0,0,0)\right| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

e la retta di minima distanza $\bar{y}+\sigma(\bar{x}-\bar{y})$ è

$$\left(x=-\frac{1}{2}\sigma,\quad y=0,\quad z=\frac{1}{2}\sigma \right)$$

Distanza fra rette parallele

In tal caso la teoria precedente deve essere modificata, in quanto il sistema ivi introdotto

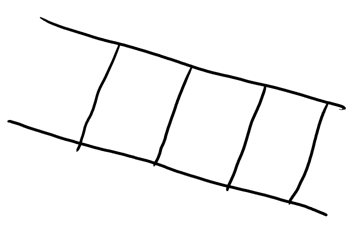
$$\begin{cases} \bar{s}|u|^2-\bar{t}\,uv=(y_0-x_0)u \\ \bar{s}\,uv-\bar{t}|v|^2=(y_0-x_0)v \end{cases}$$

è singolare perché, essendo le rette parallele u è multiplo di v. Sostituiamo dunque $u=\lambda v$, ottenendo

$$\begin{cases} \bar{s}\lambda^2|v|^2-\bar{t}\lambda|v|^2=(y_0-x_0)\lambda v \\ \bar{s}\lambda|v|^2-\bar{t}|v|^2=(y_0-x_0)v \end{cases}$$

ove la prima equazione si può ottenere dalla seconda moltiplicandola per λ. Dunque le (infinite) soluzioni si possono trovare risolvendo

$$\lambda|v|^2\bar{s}-\bar{t}|v|^2=(y_0-x_0)v$$



Scelta una ad arbitrio $\bar{s},\bar{t}$

si otterranno i due punti $x_0 + \bar{s}u$ e $y_0 + \bar{t}v$

per cui passa una perpendicolare ad entrambe le

rette date.

La loro distanza è $|x_0 + \bar{s}u - y_0 - \bar{t}v|$ ed una

retta di minima distanza è la retta per

$x_0 + \bar{s}u$ e $y_0 + \bar{t}v$, come per le rette sghembe.