BREVE NOTA SUL CALCOLO DELLA DISTANZA FRA RETTE SGHEMBE IN $\mathbb{R}^3$

—

La teoria presentata in altri contributi (dispense G_1.5 e G_1.7) è basata sulle proprietà della proiezione ortogonale (e cioè sul teorema di Pitagora), ed è valida in ogni spazio euclideo. Essa consiste nel determinare un punto sulla prima retta (o sul primo spazio affine) ed uno sulla seconda tali che il loro vettore differenza sia ortogonale ad entrambi i generatori (velocità) delle rette, ricordare che così la loro distanza è minima rispetto a tutte le altre coppie di punti, e infine calcolarla.

Nel caso specifico di $\mathbb{R}^3$, il prodotto vettore permette di calcolare immediatamente un vettore non nullo, normale ad entrambi i generatori delle rette (sono indipendenti perché esse sono sghembe), e ciò offre l'opportunità di una certa semplificazione dei calcoli.

Siano dunque $x_0 + su$ ed $y_0 + tv$ due rette parametriche in $\mathbb{R}^3$, e siano $\bar{s}$ e $\bar{t}$ tali che $(x_0 + \bar{s}u - y_0 - \bar{t}v) \perp u, v$.

Si ottiene allora

$$|x_0 + su - y_0 - tv|^2 = |x_0 + \bar{s}u - y_0 - \bar{t}v + (s-\bar{s})u - (t-\bar{t})v|^2 =$$

(poiché $x_0+\bar{s}u-y_0-\bar{t}v \perp \langle u,v\rangle$ mentre $(s-\bar{s})u-(t-\bar{t})v \in \langle u,v\rangle$, per il teorema di Pitagora)

$$= |x_0+\bar{s}u-y_0-\bar{t}v|^2 + |(s-\bar{s})u-(t-\bar{t})v|^2 \geq |x_0+\bar{s}u-y_0-\bar{t}v|^2$$

e dunque la distanza fra i generici punti x_0+su e y_0+tv sulle due rette è minima per $s=\bar{s}$ e $t=\bar{t}$ e vale $|x_0+\bar{s}u-y_0-\bar{t}v|^2$.

Per calcolare tale distanza, basta osservare che, qualunque siano i punti x_0+su e y_0+tv scelti sulle rette si ha che

$$(x_0+su-y_0-tv) = \underset{\perp \langle u,v\rangle}{(x_0+\bar{s}u-y_0-\bar{t}v)} + \underbrace{(s-\bar{s})u-(t-\bar{t})v}_{\in \langle u,v\rangle} .$$

Posto allora $\nu = u \times v$, ricordato che ν è ortogonale tanto ad u quanto a v; che essi sono indipendenti e quindi $\nu \neq 0$; che $(x_0+\bar{s}u-y_0-\bar{t}v)$ è ortogonale a $\langle u,v\rangle$ e quindi coincide con la sua proiezione su ν, a cui è parallelo; segue allora

$$(x_0+su-y_0-tv)_\nu \overset{\text{linearità della proiezione}}{=} (x_0+\bar{s}u-y_0-\bar{t}v)_\nu + \underset{=0}{\left[(s-\bar{s})u-(t-\bar{t})v\right]_\nu} =$$

$$= (x_0+\bar{s}u-y_0-\bar{t}v)$$

da cui

$$|(x_0+su-y_0-tv)_\nu| = |x_0+\bar{s}u-y_0-\bar{t}v| \quad \forall s,t \in \mathbb{R}$$

Il secondo membro è proprio la distanza fra i due punti di minima distanza, ovvero la distanza fra le rette.

Il primo membro è di calcolo assai più rapido del secondo (che richiede la soluzione del sistema lineare delle condizioni d'ortogonalità per determinare $\bar{s}$ e $\bar{t}$): richiede solo di scegliere ad arbitrio i valori di s e t, di calcolare il prodotto vettore $\nu = u \times v$, e infine di calcolare la norma della proiezione $(x_0+su-y_0-tv)_\nu$.
Una scelta ovvia, non necessariamente migliore delle altre, è di porre $s=0$ e $t=0$, il che produce le eleganti formule

$$d(x_0+su,\, y_0+tv) = \left|(x_0-y_0)_{u\times v}\right| \underset{|x_y|=|xy|/|y|}{=} \frac{|(x_0-y_0)\cdot(u\times v)|}{|u\times v|}$$

che coincide, per lo sviluppo di Laplace del determinante, con

$$\left|\det\begin{pmatrix} (x_0-y_0)_1 & (x_0-y_0)_2 & (x_0-y_0)_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}\right| \Bigg/ \sqrt{\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}^2}$$

NOTA: la mole di calcoli per eseguire il prodotto triplo scalare $(x_0-y_0)\cdot u\times v$ non è dissimile da quella necessaria per il calcolo del determinante 3x3 nell'ultima formula. E' però necessario calcolare la norma del vettore $u\times v$, il che impone di ri-calcolare $u\times v$ dopo aver già calcolato il determinante. A conti fatti, il calcolo $\frac{|(x_0-y_0)\cdot(u\times v)|}{|u\times v|}$ è leggermente più rapido!

Prima di presentare il consueto esempio, e a costo di risultare intollerabilmente noiosi, ricordiamo che la formula è legata indissolubilmente al prodotto vettore e, quindi, ad $\mathbb{R}^3$. Il metodo generale, invece, è (appunto!) generale: vale in ogni $\mathbb{R}^n$, ed è immune da agenti atmosferici, radiazioni, terremoti, armi chimiche e batteriologiche e... tutto il resto!
Evitare l'"effetto Sarrus", anche se è difficile dosgliersi: cosa mettere al posto del prodotto vettore se ci si trova in $\mathbb{R}^5$?

<u>Esempio</u>: Calcolare la distanza fra

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}}_{x_0}+\left\langle\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}}_{u}\right\rangle \quad \text{e} \quad \underbrace{\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}}_{y_0}+\left\langle\underbrace{\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}}_{v}\right\rangle$$

Si ha $x_0-y_0=(-1,0,4)$ $\quad u\times v=(-2,1,1)$, per cui la distanza è:

$$\frac{|(x_0-y_0)\cdot u\times v|}{|u\times v|}=\frac{|(-1,0,4)(-2,1,1)|}{|(-2,1,1)|}=\frac{|2+4|}{\sqrt{4+1+1}}=\frac{6}{\sqrt6}=\boxed{\sqrt6}$$

Chi lo volesse, può applicare l'altra formula (col determinante) e valutare somiglianze e differenze. È invece immediato riconoscere che il metodo generale è più macchinoso.
Resta comunque una risorsa indispensabile, oltre che in $\mathbb{R}^n$ se $n\neq3$, anche nel caso in cui non si sia interessati tanto al calcolo della distanza fra le rette, ma alle posizioni di minima distanza su di esse, o alla retta per esse.