IL TEOREMA DELLE FUNZIONI IMPLICITE PER LE FUNZIONI DI CLASSE C^1.

Se f verifica tutte le condizioni 1), 2) e 3) del teorema precedente, ma è di classe $C^1(\Omega)$, è facile soddisfare la condizione 4) richiedendo solo che $f_y(x_0,y_0)>0$.
Infatti, poiché f_y è continua in Ω (f è C^1), dal teorema della permanenza del segno segue che, in un opportuno intorno $B=B_\theta(x_0,y_0)$ si ha $f_y(x,y)>0$ e quindi, per la convessità della sfera e per il teorema di Lagrange applicato a $t \to f(x,t)$ sull'intervallo per il quale $(x,t)\in\Omega$ ne segue che $t\to f(x,t)$ è strettamente crescente. In B, si può dunque applicare il teorema precedente, al costo irrisorio di verificare che $f_y(x_0,y_0)>0$, e al costo, meno irrisorio ma non dissimile da quello da pagare per ottenere la tesi nel teorema precedente, di avere per dominio di φ un intervallo di raggio del tutto sconosciuto che ora, oltre che dipendere dalla distanza di (x_0,y_0) dal bordo (raggio ρ), e dai raggi δ_1 e δ_2 che risultano dall'applicare la permanenza del segno in $(x_0,y_0-\varepsilon)$ e $(x_0,y_0+\varepsilon)$, dipenderà anche dal raggio θ dell'intorno nel quale vale la permanenza di segno per $f_y(x,y)$: solo una quarta buona ragione per non

poter sapere quanto valga il raggio δ presente nella tesi!
In realtà, però, se f è di classe C^1 la funzione φ non è solo continua, come risulta dalla 7) del teorema precedente, ma anche derivabile, come vedremo nel teorema seguente.

Premetteremo però un Lemma che, in qualche modo, estende a più variabili il teorema di Lagrange.

LEMMA: *Sia* $B = B_\rho(x_0, y_0)$ *la sfera di centro* (x_0, y_0) *e raggio* ρ, *e sia* $(x,y) \in B$.
Allora esiste $\xi \in \,]0,1[$ *tale che*

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = f_x\big(x_0 + \xi(x-x_0),\, y_0 + \xi(y-y_0)\big)(x-x_0) + $$
$$+ f_y\big(x_0+\xi(x-x_0), y_0+\xi(y-y_0)\big)(y-y_0)$$

DIM. Posto $h(t) = f(x_0 + t(x-x_0),\, y_0 + t(y-y_0))$, segue dalla convessità di B che, poiché (x,y), $(x_0,y_0) \in B$ anche il segmento da essi definito è tutto contenuto in B, da cui $h : [0,1] \to \mathbb{R}$. Inoltre, essendo $f \in C^1$ differenziabile, per la derivazione delle funzioni composte anche h lo è in $]0,1[$, ed inoltre

$$h'(t) = \begin{pmatrix} f_x(x_0+t(x-x_0),\, y_0+t(y-y_0)) \\ f_y(x_0+t(x-x_0),\, y_0+t(y-y_0)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$$

$$h(0) = f(x_0, y_0) \quad \text{e} \quad h(1) = f(x, y)$$

e dal teorema di Lagrange (in una variabile) applicato ad h, definita e continua sull'intervallo $[0,1]$ e derivabile in $]0,1[$, segue

$$h(1) - h(0) = h'(\xi)$$

che è la tesi.

$\boxed{//}$

Possiamo ora enunciare e provare il

<u>TEOREMA</u> (<u>delle funzioni implicite per funzioni C^1</u>):

<u>Siano</u> $f : \Omega \to \mathbb{R}$ <u>ed</u> $(x_0, y_0) \in \Omega$ <u>verificanti</u>:

1) (x_0, y_0) interno ad Ω

2) $f(x_0, y_0) = 0$

3) $f \in C^1(\Omega)$

4) $f_y(x_0, y_0) > 0$

<u>Allora, esistono</u> $\delta > 0$ <u>e</u> $\varphi : [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \to \mathbb{R}$ <u>tali che</u>

5) $\varphi(x_0) = y_0$

6) $f(x, \varphi(x)) = 0 \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$

7) φ <u>è derivabile</u> in $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ <u>ed inoltre</u>

$$\varphi'(x) = -\frac{f_x(x,\varphi(x))}{f_y(x,\varphi(x))} \quad \forall x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$$

DIM. Poiché (x_0,y_0) è interno ad Ω, esiste $\theta>0$ tale che $B_\theta(x_0,y_0) \subseteq \Omega$. Per il teorema della permanenza del segno, applicato alla funzione continua f_y, positiva strettamente in (x_0,y_0), segue che $\exists\, \sigma$: $f_y(x,y)>0$ in $\Omega \cap B_\sigma(x_0,y_0)$.
Scelto $\rho = \min(\theta,\sigma)$ ne segue che $f_y(x,y)>0$ in $B_\rho(x_0,y_0)$.
Poiché, fissato $\bar{x}$, l'insieme $\{y \in \mathbb{R} : (\bar{x},y) \in B_\rho(x_0,y_0)\}$ (se non vuoto) è un intervallo, applicando il teorema di Lagrange alla funzione $t \to f(x,t)$ in tale intervallo ne segue che $t \to f(x,t)$ è strettamente crescente per ogni $(x,t) \in B_\rho(x_0,y_0)$. Dal teorema precedente segue che esistono δ, φ verificanti 5) e 6). Come nel teorema precedente, proveremo 7) in x_0, e poi otterremo il teorema generale spostando il punto "centrale" (x_0,y_0) nel punto $(\bar{x},\varphi(\bar{x}))$.
Dal Lemma precedente, applicato a $(x,\varphi(x))$ e $(x_0,\varphi(x_0))$ $x \neq x_0$, e alla sfera $B_\rho(x_0,y_0)$ segue che

$$f(x,\varphi(x)) - f(x_0,\varphi(x_0)) = f_x(x_0+\xi(x-x_0), \varphi(x_0)+\xi(\varphi(x)-\varphi(x_0)))(x-x_0)+$$

$$+ f_y\big(x_0+\xi(x-x_0),\ \varphi(x_0)+\xi(\varphi(x)-\varphi(x_0))\big)\,(\varphi(x)-\varphi(x_0))$$

Poiché $f(x,\varphi(x)) = f(x_0,\varphi(x_0)) = 0$ per ogni $x\in[x_0-\delta, x_0+\delta]$,

dal fatto che $f_y > 0$ su B_ρ e che il segmento che congiunge $(x_0,\varphi(x_0))$ con $(x,\varphi(x))$ è in B_ρ, ne segue che, dividendo per $x-x_0$ $(\neq 0)$ e per f_y (>0) si ottiene

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0} = -\,\frac{f_x\big(x_0+\xi(x-x_0),\ \varphi(x_0)+\xi(\varphi(x)-\varphi(x_0))\big)}{f_y\big(x_0+\xi(x-x_0),\ \varphi(x_0)+\xi(\varphi(x)-\varphi(x_0))\big)}$$

Ora, per $x\to x_0$, si ha $\varphi(x)\to\varphi(x_0)$ per il teorema precedente (continuità di φ, 7)), da cui, essendo $0<\xi<1$, segue

$$x_0+\xi(x-x_0)\to x_0 \qquad \varphi(x_0)+\xi(\varphi(x)-\varphi(x_0))\to\varphi(x_0)$$

Dalla continuità di f_x ed f_y si ha infine che

$$\varphi'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0} = -\,\frac{f_x(x_0,\varphi(x_0))}{f_y(x_0,\varphi(x_0))} = -\,\frac{f_x(x_0,y_0)}{f_y(x_0,y_0)}$$

$\boxed{//}$

Naturalmente, valgono i tre teoremi gemelli se $f_y(x_0,y_0)<0$, se $f_x(x_0,y_0)>0$ e se $f_x(x_0,y_0)<0$.

Studiamo in dettaglio l'esempio iniziale $f(x,y)=x^2+y^2-1$.
Il gradiente di f vale $\begin{pmatrix}2x\\2y\end{pmatrix}$ e dunque i punti nei quali non si può applicare il teorema di Dini per esplicitare la y in funzione di x sono quelli nei quali $f_y=2y=0$, e dunque i punti $(-1,0)$ e $(1,0)$. Quelli nei quali il teorema non consente di esplicitare la x in funzione di y sono $(0,1)$ e $(0,-1)$. In tutti gli altri si può risolvere univocamente l'equazione $x^2+y^2-1=0$ indifferentemente rispetto ad x o rispetto a y.

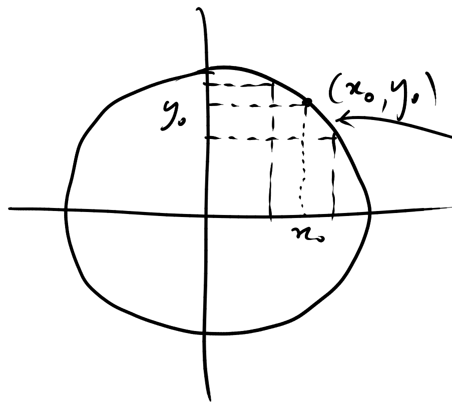


grafico di una funzione di x (o di y, indifferentemente), definita in un intorno opportuno di x_0 (o y_0).

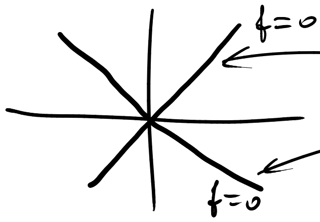
Osserviamo che $\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ solo se $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ e che tale punto NON appartiene all'insieme delle soluzioni di $x^2+y^2-1=0$ $(0=1\ ?!)$. Dunque, per ogni punto della "curva di livello 0" di $f(x,y)=x^2+y^2-1$ esiste un intorno nel quale essa è il grafico di una funzione derivabile ($f\in C^\infty(\mathbb{R}^2)$), rispetto ad una delle variabili, scelta opportunamente.
Ciò non accade, per esempio, per $f(x,y)=x^2-y^2$ in $(0,0)$.

Infatti,

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e \quad f(0,0) = 0,$$

e dunque non c'è modo di applicare il teorema di DINI per risolvere $x^2 - y^2 = 0$ univocamente rispetto ad una delle due variabili, nell'intorno di $(0,0)$, zero di f.

$$x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm y$$



luogo degli zeri di f.

Al contrario, in un qualsiasi punto distinto dall'origine una (almeno) delle due componenti del gradiente non si annulla e permette di applicare il teorema di Dini.

Per maggiore semplicità il teorema è stato enunciato e provato in $\mathbb{R}^2$, ma la prova può essere trasposta senza modifiche alle $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, con l'unica avvertenza di interpretare x_0, x come vettori in $\mathbb{R}^n$, mentre y, y_0 restano scalari.

Nella prossima sezione verrà enunciata, senza dimostrazione, una versione vettoriale del teorema precedente ed una sua applicazione al problema dell'inversione (locale) delle funzioni da $\mathbb{R}^n$ in sé.

IL TEOREMA DELLE FUNZIONI IMPLICITE PER LE FUNZIONI VETTORIALI

TEOREMA: Siano $f : \Omega \times \Sigma \to \mathbb{R}^m$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^m$, $x_0 \in \Omega$ e $y_0 \in \Sigma$ verificanti:

1) (x_0, y_0) è interno a $\Omega \times \Sigma$

2) $f(x_0, y_0) = 0$

3) $f \in C^1(\Omega \times \Sigma)$

4) $\det f_y(x_0, y_0) \neq 0$

Allora, esistono $\delta > 0$ e $\varphi : B_\delta(x_0) \to \mathbb{R}^m$ tali che

5) $\varphi(x_0) = y_0$

6) $f(x, \varphi(x)) = 0 \quad \forall x \in B_\delta(x_0)$

7) La funzione vettoriale φ è differenziabile e la sua matrice jacobiana $\varphi_x(x)$ verifica

$$\varphi_x(x) = -\left[f_y(x, \varphi(x)) \right]^{-1} f_x(x, \varphi(x))$$

La strettissima somiglianza al teorema per le funzioni scalari non tragga in inganno! Chiariamo innanzi tutto cosa siano f_x ed f_y. In componenti scalari:

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} f_1(x_1,\dots,x_n,y_1\dots y_m) \\ \vdots \\ f_m(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots y_m) \end{pmatrix}$$

Notare che il numero delle equazioni

$$f_i(x,y) = 0$$

è pari al numero delle incognite y_i che vanno esplicitate, e cioè m.

Con f_x va intesa la matrice jacobiana della funzione vettoriale f rispetto alle variabili $x_1 \dots x_n$ e cioè

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad m \times n$$

mentre con f_y si intende

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{pmatrix} \quad m \times m.$$

L'ipotesi 4) assicura che tale matrice è invertibile nell'intorno (permanenza del segno del determinante) di

$$(x_0, y_0) = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, y_1^0, y_2^0 \dots y_m^0)$$

ed è tale inversa che appare nella formula 7) che esprime la jacobiana della φ rispetto alle sue variabili

$$\varphi_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad m \times n$$

Essa, correttamente, risulta il prodotto dell'inversa di f_y, che è $m \times m$ come la f_y con la f_x, che è $m \times n$. Le due matrici non possono essere moltiplicate se non così.

Un'interessante applicazione è il

<u>TEOREMA</u> (<u>di inversione locale</u>): <u>Sia</u> $T : \Omega \to \Sigma$, $\Omega, \Sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ <u>e</u> $x_0 \in \Omega$ <u>verificanti</u>:

1) x_0 <u>interno a</u> Ω

2) $\det T'(x_0) \neq 0$

<u>Allora</u>, <u>esistono</u> $\delta > 0$ <u>e</u> $S : B_\delta(T(x_0))$ <u>tale che</u>:

3) $T(S(y)) = y \quad \forall y \in B_\delta(T(x_0))$

4) $S \in C^1(B_\delta(T(x_0)))$

Ci limitiamo a costruire δ e S utilizzando il teorema precedente.

Posto $f(x,y) = T(x) - y \qquad x, y \in \mathbb{R}^n$

dal teorema precedente, poiché $\det T'(x_0) \neq 0$, e posto $y_0 = T(x_0)$, segue che esistono $\delta > 0$ ed $S : B_\delta(x_0) \to \mathbb{R}^n$ tali che

- $x_0 = S(y_0)$
- $f(S(x), y) \equiv 0 \Rightarrow T(S(x)) = x \Rightarrow S = T^{-1}$

Dunque, l'inversa di T, S, è garantito esistere solo in un intorno di $T(x_0)$: un'inversa locale.

Ciò si rivelerà molto utile nei cambiamenti di variabili negli integrali multipli, ove la condizione

$$\det(T') \neq 0$$

consente di effettuare il cambio di variabile, almeno negli intorni aperti.

La versione scalare è

$$\begin{cases} y_1 = T_1(x_1 \dots x_n) \\ \vdots \\ y_n = T_n(x_1 \dots x_n) \end{cases}$$

è risolubile univocamente rispetto alle $x_1 \dots x_n$ (e così invertibile) nelle vicinanze di una soluzione $(y_1^0 \dots y_n^0) = T(x_1^0 \dots x_n^0)$

se e solo se

$$\boxed{\det\left(\frac{\partial T_i}{\partial x_j}\right)(x_1^0 \dots x_n^0) \neq 0}$$

Ragionevolmente agile!

Un ultimo suggerimento: nell'applicazione i vari teoremi presentati occorre ricordare che le derivate, o lo jacobiano, che devono risultare non nulli sono quelli calcolati rispetto alle variabili, scalari o vettoriali, che si vuole esplicitare. Se si vuole risolvere l'equazione $f(x,y)=0$ rispetto ad x, in vicinanza di x_0 occorre verificare che $f_x(x_0,y_0)\neq 0$ (o che $\det f_x(x_0,y_0)\neq 0$, nel caso f ed x siano vettori), ottenendo così le funzioni esplicitate $x=\varphi(y)$ verificanti identicamente, in un intorno opportuno di y_0, $f(\varphi(y),y)=0$. Si considererà invece f_y se si vuole risolvere $f(x,y)=0$ rispetto a y.

<u>ATTENZIONE</u>: I "sistemi di funzioni implicite" conservano le buone abitudini dei sistemi lineari con soluzione unica sempre esistente: hanno un numero di righe, o di equazioni, $f_1=0$ $f_2=0$ $\dots$ $f_m=0$ pari al numero di incognite rispetto alle quali risolvere il sistema, $y_1, y_2 \dots, y_m$: il determinante della condizione 4) lo dice chiaramente ($f_y \in \mathbb{R}^{m\times m}$).

In conclusione: pur essendo le condizioni di Dini solo sufficienti, sono abbastanza flessibili per molte applicazioni, visti i controesempi via via incontrati, non troppo lontane da quelle necessarie!