L'ISOMORFISMO CANONICO E LA DIAGONALIZZABILITÀ

Il concetto di coordinate rispetto ad una base, quello di matrice associata, l'idea della dimostrazione del teorema di esistenza degli autovettori, ed altri ancora, sono basati sul legame profondo che si stabilisce fra $\mathbb{R}^n$ (o $\mathbb{C}^n$, nel caso di spazi complessi) e qualunque spazio di dimensione n, non appena venga scelta in esso una base, che funga da "sistema di riferimento cartesiano".

Sia dunque X uno spazio di dimensione finita (non nulla) n, e sia $e_1 \ldots e_n$ una sua base arbitraria. Supponiamo lo spazio reale ma, se fosse complesso, l'unica modifica richiesta è di sostituire $\mathbb{R}^n$ con $\mathbb{C}^n$. Verrà ora definita un'applicazione $\varphi: X \to \mathbb{R}^n$ e verrà provato che è lineare ed invertibile, e quindi un isomorfismo fra X ed $\mathbb{R}^n$. Poi verrà esaminato il comportamento degli isomorfismi rispetto alla dipendenza lineare e gli autovalori/autovettori.

DEFINIZIONE: Data X reale, di dimensione finita $n>0$, e data una sua base $e_1 \ldots e_n$ arbitraria, si definisce l'ISOMORFISMO CANONICO $\varphi: X \to \mathbb{R}^n$

relativa alla base $e_1 \dots e_n$, come l'applicazione che associa ad ogni $x \in X$ le proprie coordinate $(x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$ rispetto alla base, verificanti cioè

$$x = \sum_1^n x_i e_i$$

In simboli:

$$\varphi(x) = (x_1 \dots x_n)$$

L'applicazione φ è ben definita perché, essendo $e_1 \dots e_n$ una base, il sistema delle coordinate d'ogni vettore $x \in X$ esiste ed è unico.

TEOREMA: L'applicazione $\varphi : X \to \mathbb{R}^n$, prima su definita, gode delle seguenti proprietà:

1) E' LINEARE
2) E' INVERTIBILE FRA X ed $\mathbb{R}^n$ e d'conseguenza,
3) L'INVERSA E' LINEARE DA $\mathbb{R}^n$ in X
4) L'INVERSA $\varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \to X$ VERIFICA

$$\varphi^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_1^n x_i e_i$$

In sostanza φ associa ad x le proprie coordinate rispetto a $e_1 \dots e_n$, e φ^{-1} associa ad ogni sistema di n numeri $\alpha_1 \dots \alpha_n$ il vettore $\sum_1^n \alpha_i e_i$ di X.

DIM. 1) $\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$, in quanto da $x=\sum x_i e_i$ e $y=\sum y_i e_i$ seguono subito $\varphi(x)=(x_1 \dots x_n)$, $\varphi(y)=(y_1 \dots y_n)$ e dunque

$$\varphi(x+y)=((x+y)_1, \dots (x+y)_n)=(x_1+y_1, \dots, x_n+y_n)=$$
$$=(x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n)=\varphi(x)+\varphi(y)$$

$\varphi(\lambda x)=\lambda\varphi(x)$, in quanto

$$\varphi(\lambda x)=((\lambda x)_1, \dots, (\lambda x)_n)=(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)=\lambda(x_1 \dots x_n)=\lambda\varphi(x)$$

2) φ è definita fra spazi d'uguale dimensione X ed $\mathbb{R}^n$ e dunque, per il teorema di Cramer, per provarne l'invertibilità basta verificarne l'iniettività, e cioè che $\varphi(x)=0 \Rightarrow x=0$. Infatti

$$\varphi(x)=0 \Leftrightarrow (x_1,\dots,x_n)=0 \Rightarrow 0=\sum_1^n x_i e_i = x$$

3) L'inversa d'un'applicazione lineare è lineare, come provato in un altro contributo (dispense AL_S.4 pg 3).

4) $\varphi^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ è l'unico vettore x le coordinate del quale, rispetto a $e_1 \dots e_n$, sono $x_1 \dots x_n$, ed è quindi $x=\sum x_i e_i$.

L'applicazione $\varphi: X \to \mathbb{R}^n$ è lineare ed invertibile da X su tutto $\mathbb{R}^n$ ed è dunque un ISOMORFISMO fra di essi.

Il seguente risultato prova che l'immagine di un sistema indipendente mediante un isomorfismo è ancora indipendente. Lo stesso risultato può applicarsi a φ^{-1} e dunque, ad ogni sistema indipendente dell'immagine, φ^{-1} ne associa uno indipendente nel dominio.

TEOREMA Sia $\varphi : X \to Y$ un isomorfismo fra X e Y, e cioè

1) φ è lineare
2) φ è invertibile, e quindi iniettiva e suriettiva

Allora, se $u_1 \dots u_k$ sono indipendenti in X, $\varphi(u_1) \dots \varphi(u_k)$ sono indipendenti in Y.

DIM Sia $\sum \alpha_i \varphi(u_i) = 0$, e proviamo che $\alpha_i = 0$ $\forall i = 1 \dots k$.

Infatti,

$0 = \sum \alpha_i \varphi(u_i) = \varphi\left(\sum \alpha_i u_i\right)$ per la linearità di φ;

dall'iniettività di φ ne segue $\sum \alpha_i u_i = 0$ e infine, dall'indipendenza di $u_1 \dots u_k$, $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$

$\blacksquare$

Si è osservato poco prima che, essendo $\varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \to X$ un isomorfismo a sua volta, per ogni sistema indipendente $v_1 \dots v_k$ in $\mathbb{R}^n$, il sistema $\varphi^{-1}(v_1) \dots \varphi^{-1}(v_k)$ è indipendente in X.

NOTA: Un isomorfismo trasforma basi in basi. Infatti, se $e_1 \dots e_n$ è una base in X, ed è quindi indipendente, la sua immagine è indipendente in $\mathbb{R}^n$, ed essendo formata da n vettori, in numero pari a $\dim(\mathbb{R}^n)$, per il teorema dei generatori è un sistema di generatori indipendenti di $\mathbb{R}^n$.

Come ultima applicazione, studiamo il comportamento dello spettro e degli autovettori rispetto ad un isomorfismo.

TEOREMA. Sia $A : X \to X$, di spettro $\sigma(A)$ e di base spettrale $u_1 \dots u_n$, e sia $\varphi : X \to Y$ un isomorfismo fra X e Y. Allora, posto $\tilde{A} : Y \to Y$ $\tilde{A}(y) = \varphi(A(\varphi^{-1}(y)))$ si ha

1) $\sigma(\tilde{A}) = \sigma(A)$

2) $\varphi(u_1) \dots \varphi(u_n)$ sono una base spettrale di $\tilde{A}$

DIM. Per ogni u_i esiste $\lambda \in \sigma(A)$ tale che $A(u_i) = \lambda u_i$, da cui
$$\lambda \varphi(u_i) = \varphi(A(u_i)) = \varphi(A(\varphi^{-1}(\varphi u_i))) = \tilde{A}(\varphi(u_i))$$
e dunque, associato allo stesso autovalore λ, $\tilde{A}$ avrà l'autovettore $\varphi(u_i)$, non nullo perché, per l'invertibilità di φ, $\varphi(u_i) = 0 \Rightarrow u_i = 0$, e dunque u_i non sarebbe autovettore. Ne segue subito $\sigma(A) \subseteq \sigma(\tilde{A})$, oltre al fatto che $\varphi(u_1) \dots \varphi(u_n)$ sono tutti autovettori di $\tilde{A}$. Dal teorema precedente essi, essendo immagini isomorfe di una base $(u_1 \dots u_n)$, sono una base che,

essendo formata da autovettori, è una base spettrale, da cui segue 2). Per provare 1), sapendo già che $\sigma(A) \subseteq \sigma(\tilde{A})$, basta osservare che $\varphi^{-1}: Y \to X$ è a sua volta un isomorfismo. Per quanto appena provato, lo spettro di $\tilde{A}: Y \to Y$ è contenuto in quello di $\tilde{\tilde{A}} = \underbrace{(\varphi^{-1})^{-1}}_{=\varphi} \tilde{A} \varphi^{-1} = \varphi \underbrace{\varphi^{-1} A \varphi}_{\tilde{A}} \varphi^{-1} = A$, da cui $\sigma(A) \supseteq \sigma(\tilde{A})$

$\blacksquare$

Come applicazione "pratica" di questi risultati osserviamo che se $A: X \to X$, $\dim X = n > 0$, ed $e_1 \dots e_n$ è una base di X, detta $A = (a_{ij})$ la matrice associata ad A e alla base $e_1 \dots e_n$, ad ogni base spettrale in $\mathbb{R}^n$ (o $\mathbb{C}^n$, se X è complesso) dello operatore $\tilde{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ corrisponde una base spettrale di A in X, ottenuta associando ad ogni $\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$, autovettore di $\tilde{A}$ in $\mathbb{R}^n$ (o $\mathbb{C}^n$), il vettore $\sum_1^n u_i e_i$ in X.

Ciò fornisce una tecnica generale per lo studio della diagonalizzabilità in spazi astratti di dimensione finita, per mezzo dei risultati già stabiliti in $\mathbb{C}^n$ e, ove possibile, in $\mathbb{R}^n$: invece di studiare l'equazione degli autovettori in X, cercando le soluzioni non nulle in X si può scegliere ad arbitrio una base, calcolare la matrice associata all'operatore e alla base scelta, studiare la diagonalizzabilità in $\mathbb{R}^n$ (o, se occorre, in $\mathbb{C}^n$) e dedurre dalla diagonalizzabilità delle matrici in $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$ quella di A su X. Volendo determinare una base spettrale basta utilizzare i vettori $u = \sum_1^n u_i e_i$, aventi per coordinate $u_1, \dots u_n$ le componenti degli autovettori della base spettrale della matrice in $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$, determinati in precedenza.

Un ultimo esempio, finale: $A(u) = u'' - u'$ definito su $X = \langle \sin t, \cos t \rangle$.

Si ha che $A : X \to X$ in quanto

$$A(\sin t) = -\sin t - \cos t \in X \quad e \quad A(\cos t) = -\cos t + \sin t \quad (*)$$

ed altrettanto fa l'immagine di qualunque combinazione di $\sin t$ e $\cos t$.

La matrice associata ad A ed alla base $\{\sin t, \cos t\}$ è, dalle $(*)$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Non è simmetrica, e quindi A non è autoaggiunto. Lo spettro di A si ottiene risolvendo $0 = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 1 + 1$; le soluzioni sono $-1 \pm \sqrt{1-2} = -1 \pm i$. Due autovalori distinti, complessi non reali, da cui A è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$, ma non su $\mathbb{R}$, e altrettanto lo è A.

Per determinare una base spettrale (qualora si fosse interessati a ciò) risolviamo, per $\lambda = -1-i$ e $\lambda = -1+i$ il sistema omogeneo

$$\begin{array}{cc|c} -1-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -1-\lambda & 0 \end{array} \quad \text{e cioè}$$

$\boxed{\lambda = -1-i}$

$$\begin{array}{cc} u_1 & u_2 \\ \hline -1+1+i & 1 \\ -1 & -1+1+i \end{array} \equiv \begin{array}{cc} i & 1 \\ -1 & i \end{array} \xrightarrow{II \times i} \begin{array}{cc} i & 1 \\ -i & -1 \end{array} \xrightarrow{II + I \to II} \begin{array}{cc} i & 1 \\ 0 & 0 \end{array}$$

da cui $iu_1 + u_2 = 0$, le soluzioni della quale sono $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right\rangle$

Analogamente, per $\lambda = -1+i$, il sistema degli autovettori diventa

$$\begin{matrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{matrix} \xrightarrow{II \times i} \begin{matrix} -i & 1 \\ -i & 1 \end{matrix} \xrightarrow{II - I} \begin{matrix} -i & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} \end{matrix}$$ da cui

$-iu_1 + u_2 = 0$, le cui soluzioni sono $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right\rangle$.

La base spettrale in $\mathbb{R}^2$ è $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right\}$, e quella di A in X è

$u = 1 \cdot \sin t - i \cos t$ $\qquad$ $v = 1 \cdot \sin t + i \cos t$

La verifica è immediata!

$A(u) = (\sin t - i\cos t)'' - (\sin t - i \cos t)' = -\sin t + i \cos t - \cos t - i \sin t =$
$= \underline{(-1-i)\sin t - (1-i)\cos t}$

mentre $\underbrace{(-1-i)}_{\lambda} u = (-1-i)(\sin t - i \cos t) = -\sin t + i \cos t - i \sin t - \cos t =$
$= \underline{(-1-i)\sin t - (1-i)\cos t} = A(u)$

Analogamente

$A(v) = (\sin t + i \cos t)'' - (\sin t + i \cos t)' = -\sin t - i \cos t - \cos t + i \sin t =$
$= \underline{(-1+i)\sin t - (1+i)\cos t}$

mentre

$\underbrace{(-1+i)}_{\lambda} v = (-1+i)(\sin t + i \cos t) = \underline{(-1+i)\sin t + (-i-1)\cos t} = A(v)$

Alternativamente, dalle formule di Eulero, $\sin t - i \cos t = -ie^{it}$, e si ha subito: $A(-ie^{it}) = (-ie^{it})'' - (-ie^{it})' = (-i)(i)^2 e^{it} + (i)^2 e^{it} =$
$= \underline{(-1+i)e^{it}}$

mentre $(-1-i)u = (-1-i)(-ie^{it}) = \underline{(-1+i)e^{it}} = A(-ie^{it})$

Analogamente si può procedere per v, osservando che

$\sin t + i \cos t = ie^{-it} = i(\cos t - i \sin t)$

$\boxed{\text{L'unico tallone d'Achille è quello di sempre: calcolare lo spettro!}}$