ESEMPI DI STUDI DI DIAGONALIZZABILITÀ.

L'operatore su $\mathbb{R}^3$ (o $\mathbb{C}^3$) definito dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile (su $\mathbb{R}$ o su $\mathbb{C}$)?

<u>Non è autoaggiunto</u>, perché la matrice associata alla base canonica (ortonormale), e cioè A, non è autoaggiunta (ad esempio: $a_{12} = 3 \quad a_{21} = 0 \neq \overline{a_{12}} = a_{12}$.

<u>Determiniamo $\sigma(A)$</u>, risolvendo l'equazione algebrica

$$0 = \underbrace{\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix}}_{A-\lambda I} = (1-\lambda)^2(2-\lambda) - (2-\lambda) =$$

$$= (2-\lambda)\left[1 - 2\lambda + \lambda^2 - 1\right] =$$

$$= (2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda) = -\lambda(2-\lambda)^2$$

che ha le soluzioni

$$\lambda_1 = 0 \quad \text{di molteplicità } \mu_1 = 1$$

e

$$\lambda_2 = 2 \quad \text{di molteplicità } \mu_2 = 2$$

<u>NON si può applicare il criterio di 3 autovalori distinti</u> in quanto λ_2 è doppio (due radici coincidenti).

C'è comunque la possibilità che l'operatore sia diagonalizzabile, su $\mathbb{R}$, perché tutti gli autovalori sono reali, e ciò accade se e solo se

$$\dim \operatorname{Ker}(A-\lambda_2 I) = 2 = \mu_2$$

Occorre quindi determinare l'autospazio $\operatorname{Ker}(A-\lambda_2 I)$, stabilendo se la sua dimensione sia 2, nel qual caso A è diagonalizzabile, o sia strettamente minore, e allora A non è diagonalizzabile. Ponendo $\lambda = 2$ nell'equazione $(A-\lambda I)u=0$ e cioè in

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & 3 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

si ottiene il sistema omogeneo

$$\begin{array}{ccc|c} u_1 & u_2 & u_3 & \\ \hline -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \end{array}$$

che, ridotto a scala, diventa

$u_1 - 3u_2 + u_3 = 0$ e cioè

$u_1 = 3u_2 - u_3$, da cui l'autospazio è

$$\begin{pmatrix} 3u_2 - u_3 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = u_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

I due generatori sono indipendenti, perché non sono uno multiplo dell'altro. Dunque, l'autospazio di $\lambda = 2$, unico autovalore multiplo, ha dimensione 2, pari alla molteplicità

algebrica della radice $\lambda = 2$ nell'equazione caratteristica.
Notiamo che le dimensioni degli autospazi coincidono con le molteplicità dei relativi autovalori, che gli autovalori sono tutti reali, e quindi l'operatore è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

<u>Un altro esempio</u>

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$ è diagonalizzabile?

1) NON è autoaggiunto (la matrice non lo è)

2) lo spettro di A è formato dalle soluzioni di

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 3 \\ 2 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-2\lambda+\lambda^2)(2-\lambda) - 6 - $$
$$-(-2(2-\lambda)) =$$
$$= -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 - 6 + 4 - 2\lambda =$$
$$= -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 7\lambda =$$
$$= -\lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 7)$$

Dunque $\lambda = 0$ ha molteplicità 1.
Gli zeri di $\lambda^2 - 4\lambda + 7$ sono $2 \pm \sqrt{4-7} = 2 \pm i\sqrt{3}$

Ne segue che A ha tre autovalori distinti (solo uno reale) e, dunque, l'operatore su $\mathbb{C}^n$, definito dalla matrice data, è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$, mentre non lo è su $\mathbb{R}$.

In sostanza:

- Se l'operatore è autoaggiunto è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.
- Se, <u>DETERMINATO LO SPETTRO</u>, ci sono autovalori complessi non reali, non è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.
- Se gli autovalori sono tutti semplici, e sono dunque tanti quanti la dimensione dello spazio, allora l'operatore è diagonalizzabile, su $\mathbb{R}$ se gli autovalori sono tutti reali, su $\mathbb{C}$ se qualche autovalore non lo è.
- Se qualche autovalore è multiplo, occorre calcolare la dimensione del suo autospazio e stabilire se essa coincide o no con la molteplicità. Se, per tutti gli autovalori multipli, la molteplicità coincide con la dimensione dell'autospazio, allora l'operatore è diagonalizzabile, mentre non lo è se qualche dimensione di autospazio è strettamente minore della molteplicità. Gli operatori diagonalizzabili, ancora una volta, lo saranno su $\mathbb{R}$ se ogni autovalore è reale, mentre lo saranno solo su $\mathbb{C}$ se qualche autovalore non lo è.

<u>NOTA</u>: Le operazioni richieste dal "programma" precedente sono:

1) Ispezione della matrice associata alla base canonica (o altra base ortonormale) per decidere se è autoaggiunto: $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$

2) Risoluzione dell'equazione caratteristica e fattorizzazione completa del polinomio caratteristico, per determinare tutti gli autovalori e le loro molteplicità.

3) Ispezionare gli autovalori, notando se sono tutti reali o meno, e se sono tutti semplici o meno.

4) Calcolare le dimensioni del nucleo di $A(u)-\lambda u$ per tutti gli autovalori multipli, riducendo a scala il sistema omogeneo corrispondente, e limitarsi a calcolare il numero dei pivot, senza determinare una base dell'insieme delle soluzioni (sostituzione all'indietro) per decidere se tale numero coincide o no con la molteplicità dell'autovalore, ripetendo l'operazione per gli autovalori multipli.

NOTA: alcuni problemi posti dalle applicazioni, come calcolare gli assi principali d'inerzia d'un solido, richiedono espressamente il calcolo d'una base spettrale. Mentre, dopo aver determinato lo spettro ed aver stabilito la diagonalizzabilità dell'operatore si sa già, senza conti ulteriori, che la sua matrice associata alla base spettrale avrà sulla diagonale gli autovalori, ciascuno ripetuto tante volte quant'è la sua molteplicità, se si vuole sapere qual è il cambio di base che rende diagonale la matrice associata occorre necessariamente calcolare una base per ogni autospazio, risolvendo completamente i sistemi omogenei $A(u)=\lambda u$

per tutti i λ dello spettro, e riunire i vettori in un unico insieme.

<u>NOTA</u>: Il teorema d'esistenza degli autovettori (spazi invarianti) viene provato scegliendo una base nello spazio e risolvendo l'equazione $A(u) = \lambda u$ mediante la base stessa e le coordinate rispetto ad essa. La stessa tecnica può essere impiegata per risolvere il problema della diagonalizzabilità in un qualunque spazio di dimensione finita, non necessariamente un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$.

In effetti, scelta una qualunque base $e_1 \dots e_n$ nello spazio astratto X, si può associare ad ogni vettore $x \in X$ il vettore di $\mathbb{R}^n$ (o $\mathbb{C}^n$, se X è complesso) costituito dalle sue coordinate $x_1 \dots x_n$ rispetto a $e_1 \dots e_n$, verificanti

$$x = \sum_1^n x_i e_i \qquad (*)$$

Come è stato implicitamente verificato nella prova del teorema degli spazi invarianti, ad ogni autovettore u di A ($u \neq 0$, $A(u) = \lambda u$ per qualche λ reale o complesso) corrisponde un autovettore $(u_1 \dots u_n)$ della matrice A, associata ad A ed alla base $e_1 \dots e_n$, e viceversa. Si può anche dimostrare che ad ogni sistema indipendente di autovettori di A corrisponde un sistema indipendente di autovettori di A e, dunque, si può comodamente studiare il problema in $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$ per A e poi, dalla (eventuale) base spettrale $\begin{pmatrix} u_1^1 \\ u_n^1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1^2 \\ u_n^2 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} u_1^n \\ u_n^n \end{pmatrix}$, ricavare quella per A in X mediante la (*)

$$u^1 = \sum_1^n u_i^1 e_i \qquad u^2 = \sum_1^n u_i^2 e_i \qquad \dots\dots \qquad u^n = \sum_1^n u_i^n e_i$$

Una dimostrazione di ciò verrà esposta nella terza parte.

Esaminiamo prima il procedimento in un "caso reale".

Sia $X = \langle \sinh t, \cosh t \rangle$ ed $A: X \to X$ definita da $A(u) = u'$.

I vettori $\sinh t$ e $\cosh t$ sono indipendenti, in quanto $\sinh 0 = 0$ mentre $\cosh 0 = 1$ e dunque non può esistere α tale che

$$\sinh t = \alpha \cosh t \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

X è invariante per A, in quanto $A(\sinh t) = \cosh t \in X$ e $A(\cosh t) = \sinh t \in X$ e quindi ogni vettore in X, combinazione lineare di $\sinh t$ e $\cosh t$, avrà immagine anch'essa combinazione di $\cosh t$ e $\sinh t$, e cioè un elemento di X. La matrice associata ad A e $\{\sinh t, \cosh t\}$ è

$$A(\sinh t) = \cosh t = 0 \cdot \sinh t + 1 \cosh t \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ prima colonna}$$

$$A(\cosh t) = \sinh t = 1 \cdot \sinh t + 0 \cosh t \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ seconda colonna}$$

da cui

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Essendo A reale simmetrica (e quindi $\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$ autoaggiunta) A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ ed avrà una base spettrale $\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^2$, alla quale corrisponderà una base spettrale di A in X, ponendo

$$u = u_1\sinh t + u_2\cosh t \quad \text{e} \quad v = v_1\sinh t + v_2\cosh t$$

Ciò esaurisce la questione della diagonalizzabilità. Per esercizio, determiniamo tale base spettrale. Iniziamo col determinare quella di $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$. Lo spettro è formato dalle soluzioni di

$$0 = \begin{vmatrix}-\lambda & 1\\ 1 & -\lambda\end{vmatrix} = \lambda^2-1 \implies \lambda=\pm 1$$

Una corrispondente base spettrale è

$\boxed{\lambda=1}$

$$\begin{array}{cc} u_1 & u_2\\ \hline -1 & 1\\ 1 & -1\end{array} \xrightarrow{II+I} \begin{array}{cc} u_1 & u_2\\ \hline -1 & 1\\ \cancel{0} & \cancel{0}\end{array} \qquad \text{da cui } u_2=u_1$$

sicchè l'autospazio è $\left\{\begin{pmatrix}u_1\\u_1\end{pmatrix}\right\} = \left\langle\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\rangle$

Analogamente, per $\boxed{\lambda=-1}$ si ottiene l'autospazio $\left\langle\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right\rangle$.

Alla base spettrale $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right\}$ per A corrisponde la base spettrale per A

$$u = 1\cdot\sinh t + 1\cdot\cosh t = e^{t} \qquad v = -1\cdot\sinh t + 1\cdot\cosh t = e^{-t}.$$

Infatti, si verifica subito che

$$A(e^t) = (e^t)' = e^t = 1 \cdot e^t$$

$e^t \neq 0$, 1 è autovalore ed e^t autovettore

mentre

$$A(e^{-t}) = (e^{-t})' = -e^{-t} = -1 \cdot e^{-t}$$

$e^{-t} \neq 0$, -1 è autovalore ed e^{-t} autovettore

NOTA: lo spettro è rimasto identico, mentre gli autovettori sono legati fra loro dall'isomorfismo canonico

$$X \ni \sum_1^n x_i e_i \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \ (\text{o } \mathbb{C}^n)$$

NOTA: si può benissimo attaccare il problema direttamente. Da $A(u) = u'$ segue che l'equazione degli autovettori è la equazione differenziale $u' = \lambda u$, che ha soluzioni per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$, della forma $u = e^{\lambda t}$. La derivata è piena zeppa di autovalori ed autovettori, ma ciò non risponde al nostro problema nello spazio X: si tratta di stabilire se qualcuno dei vettori $e^{\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, appartenga ad X. La risposta è sì, ma solo per $\lambda = 1$ o $\lambda = -1$ (guarda caso!). Una verifica rapida di ciò può essere effettuata osservando che e^t, e^{-t} ed $e^{\lambda t}$, $\lambda \neq 1$ e $\lambda \neq -1$, sono tre autovettori di $u \to u'$ relativi ai tre autovalori distinti $1, -1$, e λ, e sono dunque indipendenti, da cui $e^{\lambda t} \notin \langle e^t, e^{-t} \rangle$.