# LA DIAGONALIZZABILITA' IN PRATICA (I)

Queste brevi note intendono presentare una strategia generale per affrontare, in pratica, lo studio della diagonalizzabilità nei sottospazi di $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$. Questo spero aiuterà a destreggiarsi nel complesso dei risultati sulla diagonalizzabilità. Ad esempio: calcolato lo spettro (con le molteplicità), per studiare la diagonalizzabilità non occorre determinare tutti gli autospazi, ma solo le loro dimensioni e confrontarle con le molteplicità dei relativi autovalori. La sequenza di "passi" presentata assicura quindi una certa economia di calcoli.

## PASSO 1 "L'operatore è autoaggiunto"?

Grazie alla condizione necessaria e sufficiente perché $A: X \to X$, $X$ euclideo (reale o complesso) sia autoaggiunto, basta chiedersi:

"La matrice associata ad $A$ e ad una qualunque base ortonormale in $X$ verifica $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ $\forall i,j = 1..\dim X$"?

Se $X = \mathbb{R}^n$ (o $\mathbb{C}^n$) e $A(u) = A\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$, la matrice $A$ è la matrice associata ad $A$ ed alla base canonica, che è ortonormale. Basta dunque esaminare la matrice, e decidere se $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ $\forall i,j$. In questo caso, $A$ è diagonalizzabile per il teorema spettrale (reale o complesso). In qui caso, è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$, perché gli autovalori sono comunque tutti reali, anche se operatore ed autovettori possono non esserlo.

Gli operatori autoaggiunti non sono l'unica classe di operatori diagonalizzabili "gratis": gli operatori unitari, non trattati nel corso, sono un'altra classe naturale, legata ai movimenti rigidi e le isometrie in $\mathbb{R}^n$ (vedi S. LANG: Algebra Lineare). Dunque, ad esempio:

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1-i & 2 \\ 1+i & 1 & -3+i \\ 2 & -3-i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad A: \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$$

è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ (autovalori reali), pur non essendo un operatore reale (matrice associata rispetto alla base canonica non reale), perché è autoaggiunto. Infatti:

1) sulla diagonale ci sono reali
2) $a_{12} = 1-i = \overline{1+i} = a_{21}$, $a_{13} = 2 = \overline{2} = a_{31}$, $a_{23} = -3+i = \overline{-3-i} = a_{32}$

Questione chiusa! Se l'operatore non è autoaggiunto, allora

## PASSO 2: Determinare tutti gli autovalori in $\mathbb{C}$

E' l'unica risposta che non può essere ottenuta mediante la teoria dei sistemi lineari e l'onnipresente algoritmo di Gauss. Occorre calcolare esplicitamente gli zeri del polinomio caratteristico $\det(A-\lambda I)$, $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_k$ e fattorizzarlo nella forma seguente, per determinarne le molteplicità:

$$\det(A-\lambda I) = (\lambda_1-\lambda)^{\mu_1}(\lambda_2-\lambda)^{\mu_2}\cdots(\lambda_k-\lambda)^{\mu_k}$$

Gli interi $\mu_1, \mu_2, \dots \mu_k$ sono le molteplicità delle radici $\lambda_1 \dots \lambda_k \in \mathbb{C}$ dell'equazione $\det(A-\lambda I)=0$, verificanti $\sum \mu_i = n = \dim X$.

E' inutile dire che se gli autovalori non sono tutti reali, di certo l'operatore non può essere diagonalizzabile su $\mathbb{R}$, anche se può esserlo in $\mathbb{C}$. Se invece sono tutti reali, si può proseguire assumendo che $\sum_1^k \mu_i = n = \dim X$.

<u>**NOTA**</u>: se $X$ è complesso, è il teorema di Gauss a garantire che $\sum_{\lambda_i \in \sigma(A)} \mu_i = n$. Infatti, trovata una radice $\lambda_i$ si divide il polinomio caratteristico per $(\lambda-\lambda_i)$ abbassando il grado di 1, e si può riapplicare il teorema di Gauss al quoziente, e ripetere il passo, n volte, fino a che il quoziente ottenuto non è costante. Se invece $X$ è reale, non è affatto detto che il polinomio caratteristico abbia n radici reali ($p(\lambda) = \lambda^2+1$, ad esempio, non ne ha affatto!), e dunque:

**Se $A: X \to X$ e $X$ è complesso, allora il polinomio caratteristico ha, per il teorema di Gauss, radici complesse $\lambda_1 \dots \lambda_k$, di molteplicità $\mu_1 \dots \mu_k$ verificanti**

$$\sum_1^k \mu_i = \dim X$$

Nel caso gli autovalori siano tutti reali, se $A$ è diagonalizzabile, lo è su $\mathbb{R}$, mentre se almeno uno non è reale, se risulterà diagonalizzabile, lo sarà su $\mathbb{C}$.

PASSO 3: Determinare la dimensione degli autospazi $A_{\lambda_i} = Ker(A-\lambda_i I)$, per tutti gli autovalori multipli ($\mu_i > 1$).

Se $\lambda_i$ è semplice, ciò non occorre: ricordando che un importante risultato assicura che $\mu_i \geq \dim A_{\lambda_i}$, si osservi che $\dim A_i > 0$, perché fra le soluzioni di $Au = \lambda_i u$ ci sono, per definizione di autovalore, vettori non nulli (gli autovettori); d'altronde, essendo $\dim Ker(A-\lambda_i I) \leq \mu_i = 1$, ne segue subito $\dim Ker(A-\lambda_i I) = 1$.

Attenzione: NON occorre, a meno che non sia espressamente richiesto dal problema, determinare una base per $Ker(A-\lambda_i I)$, ma SOLO calcolarne la dimensione! In pratica basta fermarsi alla riduzione a scala e $\boxed{\text{contare}}$ i "non-pivot", senza proseguire nella risoluzione completa del sistema omogeneo $(A-\lambda_i I)u = 0$, e cioè $Au = \lambda_i u$, come sarebbe invece necessario se si dovesse costruire esplicitamente una base di autovettori. Metà calcoli!

## PASSO 4 : $\boxed{\text{Criterio degli autovalori semplici}}$.

Se $\boxed{\text{tutti}}$ gli autovalori sono semplici ($\mu_i = 1 \ \forall i$) allora A è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$. Se sono anche reali, allora A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

Infatti, ogni sistema ottenuto scegliendo un autovettore qualunque in ciascuno degli n autospazi è indipendente, per il teorema sugli autovettori in autospazi distinti e dunque, essendo un sistema indipendente di n vettori in uno spazio X di dimensione n, è una base per il teorema dei generatori ed è formata da soli autovettori (≡ base spettrale). In definitiva

"A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$), se ha n radici reali (complesse) distinte, ove $n = \dim X$".

## PASSO 5 : Se la somma delle dimensioni degli autospazi di tutti gli autovalori trovati è $\dim X$, allora A è diagonalizzabile. Altrimenti non lo è.

Infatti, la somma di autospazi è diretta. Ne segue che, se $\lambda_1 \ldots \lambda_k$ sono gli autovalori (reali o meno) trovati e

$A_{\lambda_1} \dots A_{\lambda_k}$ sono i relativi autospazi, allora $\bigoplus_{i=1}^{k} A_{\lambda_i} \subseteq X$, perché tutti gli autospazi sono sottospazi di $X$, e tale è la loro somma $\bigoplus A_{\lambda_i}$. Inoltre, essendo la somma diretta

$$\dim \bigoplus A_{\lambda_i} = \sum_{i=1}^{k} \dim A_{\lambda_i}$$

Se dunque $\sum_1^k \dim A_{\lambda_i}$ è uguale a $\dim X$ ne segue che $\bigoplus A_{\lambda_i}$ è un sottospazio di $X$ di uguale dimensione, e dunque

$$\bigoplus A_{\lambda_i} = X$$

La base spettrale richiesta per la diagonalizzabilità si ottiene allora scegliendo (ad arbitrio) una base in ogni autospazio (costituita dunque da autovettori) e riunendo in un unico insieme tutti gli autovettori scelti.

Se invece $\sum_1^k \dim A_{\lambda_i} < \dim X$, allora

$$\dim \bigoplus_1^k A_{\lambda_i} = \sum_1^k \dim A_{\lambda_i} < \dim X$$

e dunque, per il teorema del massimo numero di vettori indipendenti, non possono esistere in $\bigoplus_1^k A_{\lambda_i}$ un numero di autovettori indipendenti pari a $\dim X$.

In pratica:

"<u>Se, per ogni autovalore multiplo</u> ($\mu_i > 1$), <u>risulta</u>

$$\dim \ker (A - \lambda_i I) = \mu_i,$$

<u>allora</u> A <u>è diagonalizzabile su</u> $\mathbb{C}$. <u>Se</u>, <u>inoltre</u>, <u>gli autovalori sono tutti reali</u>, <u>allora lo è su</u> $\mathbb{R}$.

Infatti, è stato osservato che $\dim \ker (A - \lambda_i I) = \mu_i = 1$ per ogni autovalore semplice e dunque, dall'ipotesi, segue che

$$\dim \ker (A - \lambda_i I) = \mu_i \quad \forall i = 1..k$$

ed essendo $\sum \mu_i = \dim X$, segue ancora

$$\sum \dim \ker (A - \lambda_i I) = \sum \mu_i = \dim X$$

e dunque si può applicare il criterio precedente.