UN CRITERIO GENERALE DI DIAGONALIZZABILITA'

(21/12/2016)

In questa nota brevissima verrà presentata una dimostrazione semplificata del criterio generale di diagonalizzabilità, già contenuta in un altro contributo.

TEOREMA: Sia X uno spazio di dimensione finita non nulla. Detti allora $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ i suoi autovalori e $A^{\lambda_1}, \ldots, A^{\lambda_k}$ i relativi autospazi, si ha che

$$A \text{ è diagonalizzabile se e solo se } \sum_{i=1}^{k} \dim A^{\lambda_i} = \dim X$$

DIM.

C.N. A diagonalizzabile $\Rightarrow \sum \dim A^{\lambda_i} = \dim X$.

Infatti, sia $u_1 \dots u_n$ una base spettrale, che esiste per ipotesi, e raggruppiamo insieme gli autovettori relativi al medesimo autovalore:

$u_1^1 \dots u_{n_1}^1 \in A^{\lambda_1}$, $u_1^2 \dots u_{n_2}^2 \in A^{\lambda_2}$, $\dots$, $u_1^k \dots u_{n_k}^k \in A^{\lambda_k}$. Il loro numero totale è $\dim X$, e dunque

$$\sum_1^k n_i = \dim X$$

Inoltre, essendo elementi di una base, sono indipendenti e, per il teorema sul massimo numero di vettori indipendenti, ne segue $n_1 \leq \dim A^{\lambda_1}$, $n_2 \leq \dim A^{\lambda_2}$, $\dots$, $n_k \leq \dim A^{\lambda_k}$.

Dunque:

$$\dim X = \sum_{i=1}^k n_i \leq \sum_{i=1}^k \dim A^{\lambda_i}$$

D'altronde, la somma degli autospazi (distinti) A^{λ_i} è diretta, e dunque $\sum \dim A^{\lambda_i} = \dim \bigoplus A^{\lambda_i}$. Inoltre $\bigoplus A^{\lambda_i} \subseteq X$, da cui, infine

$$\dim \bigoplus A^{\lambda_i} \leq \dim X$$

in quanto la somma degli autospazi è un sottospazio di X, e la sua dimensione è non maggiore di quella di X. ■

C. S. $\sum \dim A^{\lambda_i} = \dim X \Longrightarrow A$ **diagonalizzabile**

Infatti, siano $u_1^1 \dots u_{n_1}^1, \; u_1^2 \dots u_{n_2}^2, \dots, u_1^k \dots u_{n_k}^k$ delle basi arbitrarie di $A^{\lambda_1}, A^{\lambda_2}, \dots, A^{\lambda_k}$, rispettivamente. Poiché A^{λ_i} sono tutti autospazi e i vettori u_j^i sono tutti non nulli in quanto membri di basi, essi sono autovettori di A. Per ipotesi, il loro numero è $\dim X$. Sono inoltre indipendenti poiché, essendo la somma di autospazi diretta, da

$$\underbrace{\sum_{i_1=1}^{n_1} \alpha_{i_1}^1 u_{i_1}^1}_{\in A^{\lambda_1}} + \underbrace{\sum_{i_2=1}^{n_2} \alpha_{i_2}^2 u_{i_2}^2}_{\in A^{\lambda_2}} + \dots + \underbrace{\sum_{i_k=1}^{n_k} \alpha_{i_k}^k u_{i_k}^k}_{\in A^{k_k}} = 0$$

segue subito

$$\sum_{i_1=1}^{n_1} \alpha^1_{i_1} u^1_{i_1} = 0, \quad \ldots, \quad \sum_{i_k=1}^{n_k} \alpha^k_{i_k} u^k_{i_k} = 0$$

e, poiché i vettori $u^\ell_1 \ldots u^\ell_{n_\ell}$ sono una base di A^{λ_ℓ}, e quindi indipendenti, si ha che tutti i coefficienti delle combinazioni lineari debbono annullarsi! Si ottiene dunque che l'insieme dei vettori $\{u^i_j : i=1..k, j=1..n_i\}$ è un insieme di $\dim X$ autovettori indipendenti in X che, per il teorema dei generatori, è una base di X.

$\blacksquare$

NOTA: Il criterio ha validità generale, e non è limitato ai soli operatori su spazi complessi: non abbiamo mai adoperato il teorema fondamentale dell'algebra! Se un operatore ha autovalori reali e la somma delle dimensioni dei relativi autospazi è pari a quella del dominio dell'operatore, esso è diagonalizzabile. Alcune differenze si ravvisano nei criteri più raffinati che usano la molteplicità, per i quali si rimanda al contributo precedente.