INTRODUZIONE ALLA TEORIA DEI DETERMINANTI.

(II)

In questa sezione verranno presentati due risultati che vengono talvolta adoperati, soprattutto in teoria.

TEOREMA (Sviluppo di LAPLACE, secondo una riga)

Sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A = (a_{ij})$. Allora, detta A^{ij} la matrice ottenuta da A sopprimendo la riga i e la colonna j (MINORE ESTRATTO DA A), risulta

$$\boxed{\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{ij} \det A^{ij}}$$

Sviluppo di Laplace secondo la riga i-esima

Questa formula consente di calcolare il determinante, ma ad un prezzo altissimo: un determinante $n\times n$ richiede n determinanti $(n-1)\times(n-1)$, $n(n-1)$ determinanti $(n-2)\times(n-2)$ ... e dunque $(n-1)!$ determinanti 2×2. Per quanto semplice possa essere il calcolo di un determinante 2×2, basta e avanza il fattoriale per rendere la tecnica inutilizzabile in pratica, già per matrici modeste.

Più o meno lo stesso livello di impraticabilità ha la seguente formula per la matrice inversa

<u>**TEOREMA**</u>: <u>Sia</u> $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ <u>invertibile</u>. <u>Allora</u>

$$(A^{-1})_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}}{\det A} \det A^{ji}$$

NOTARE LO SCAMBIO DI INDICI !!!...

<u>DIM</u>. Il sistema lineare $A\begin{pmatrix} x_{1i} \\ \vdots \\ x_{ni}\end{pmatrix} = e_i$, la soluzione del quale è la colonna i-esima di A^{-1}, può essere calcolata con la formula di Cramer

componente j-esima della soluzione

$$x_{ji} = \frac{1}{\det A} \det(A_1, A_2, \dots, A_{j-1}, \overset{\downarrow \text{ colonna j-esima}}{e_i}, A_{j+1}, \dots A_n)$$

e, dallo sviluppo di Laplace rispetto alla colonna j, formata da zeri salvo l'elemento di riga i, si ha infine

$$\det(A_1 \dots A_{j-1}\; e_i\; A_{j+1} \dots A_n) = (-1)^{i+j} \det A^{ij}$$

da cui la tesi. ∎

Il calcolo dell'inversa coi "cofattori" A^{ij} comporta il calcolo di n^2 determinanti $(n-1)\times(n-1)$ (quelli dei cofattori A^{ij}) più uno $n\times n$ ($\det A$): peggiore dello sviluppo di Laplace, anche per matrici di dimensioni ragionevoli.

CASI PARTICOLARI

È stato già esaminato il caso delle matrici diagonali e triangolari. Due utili formule sono quelle per i determinanti 2×2 e 3×3. Per essi valgono le formule:

$$\boxed{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{c}{a}\begin{vmatrix} a & b \\ a & \frac{a}{c}d \end{vmatrix} = \frac{c}{a}\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & \frac{a}{c}d - b \end{vmatrix} = \frac{c}{a} \cdot a\left(\frac{a}{c}d - b\right) = \boxed{ad - bc}$$

Con pazienza, si può provare anche che

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \underbrace{(aei + bfg + dhc)}_{\text{diagonali } \diagdown} - \underbrace{(ceg + bdi + ahf)}_{\text{diagonali } \diagup}$$

$$\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix} \qquad\qquad \begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}$$

Queste formule sono casi particolari della <u>vera</u> definizione del determinante, e cioè (se $A = (a_{ij})$):

$$\det A = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} (-1)^{|\sigma|} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

ove Σ_n è l'insieme di tutte le permutazioni $(\sigma(1), \sigma(2), .., \sigma(n))$ degli interi $(1, 2, .., n)$ (che sono $n!$), e $|\sigma|$ è il <u>SEGNO</u> della permutazione σ, definito come -1 elevato al numero di "inversioni", ossia di coppie $i<j$ tali che $\sigma(i) > \sigma(j)$

Ad esempio:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in \Sigma_2} (-1)^{|\sigma|} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)}$$

Ci sono solo due permutazioni: $(1,2)$, con 0 inversioni, e $(2,1)$ con 1 inversione. Ne segue che il determinante vale

$(-1)^0 a_{11} a_{22} + (-1)^1 a_{12} a_{21}$, come provato poco più su.

Analogamente:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in \Sigma_3} (-1)^{|\sigma|} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)}$$

Le permutazioni Σ_3 su $\{1,2,3\}$ sono $\{(1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,1,2)$ e $(3,2,1)\}$ ove

$(1,2,3)$ non ha inversioni (permutazione identica)

$(1,3,2)$ e $(2,1,3)$ hanno 1 inversione

$(2,3,1)$ e $(3,1,2)$ hanno 2 inversioni

$(3,2,1)$ ha 3 inversioni

da cui

$$\begin{aligned} \det A = {} & (-1)^0 a_{11} a_{22} a_{33} + (-1)^1 \left[a_{11} a_{23} a_{32} + a_{12} a_{21} a_{33} \right] + \\ & + (-1)^2 \left[a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} \right] + \\ & + (-1)^3 a_{13} a_{22} a_{31} \end{aligned}$$

che corrisponde allo sviluppo fornito poco più su.

Volendo impiegare la definizione per calcolare il determinante, il che comporta il calcolo di $n!$ moltiplicazioni di n fattori; (pura follia!), occorre impiegare modi efficienti per elencare tutte le permutazioni, e calcolarne le inversioni.

Elenchiamo, a titolo di esempio, le permutazioni di $(1,2,3,4)$

1	1 2 3 4	esaurite le permutazioni per gli ultimi due termini	tutte le permutazioni che cominciano per 1
2	1 2 4 3		
3	1 3 2 4	continuare, permutando di preferenza gli ultimi termini	
4	1 3 4 2		
5	1 4 2 3		
6	1 4 3 2		

Notare che gli ipotetici numeri formati dalle cifre indicate crescono!

Ci sono altre 18 permutazioni, che iniziano rispettivamente per 2, 3, 4. Ad esempio, quelle che iniziano per 3 sono

$(3,1,2,4)$, $(3,1,4,2)$, $(3,2,1,4)$, $(3,2,4,1)$, $(3,4,1,2)$, $(3,4,2,1)$

L'ordine così ottenuto è quello "crescente", e la complessità dell'elenco è inerente al problema, e dunque ineludibile.

Il conteggio delle inversioni è molto semplice: basta confrontare ogni numero con quelli che lo seguono, e contare quelli più piccoli:

53421 — 4 inversioni che coinvolgono 5 +

3421 — 2 inversioni che coinvolgono 3 +

421 — 2 inversioni che coinvolgono 4 +

21 — 1 inversione che coinvolge 2

$=$ 9 inversioni

segno negativo!

Tale definizione, dopo adeguato approfondimento delle proprietà del segno delle permutazioni, consente di provare tutte le proprietà (le tre delle "definizioni" di Artin, poi i teoremi di Laplace, Binet e del determinante della trasposta) dalle quali abbiamo dedotto le altre.

Ogni libro di Algebra Lineare, come ad esempio quello di LANG, contiene presentazioni più complete di quella qui contenuta, alle quali il lettore interessato ad approfondire è indirizzato.

Un'ultima curiosità per ricordare lo sviluppo dei determinanti 3X3:

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{array}}$$

viene chiamata ampollosamente "regola di Sarrus". E' LETALE SE APPLICATA DAL 4X4 IN SU. Basta osservare che per una 4X4 questa "regola" richiede 8 moltiplicazioni, mentre il determinante ne richiede $4! = 24$. E' chiaro che qualcosa non va! Nulla osta, ex parte docentis, che venga impiegata nei casi consentiti dalla legge, e cioè $\boxed{\text{soltanto per il calcolo dei determinanti 3X3.}}$