INTRODUZIONE ALLA TEORIA DEI DETERMINANTI.

(I)

L'esposizione che segue NON intende svolgere in modo compiuto la teoria dei determinanti, ma intende presentare i risultati più importanti senza eccessivi appesantimenti. Il punto di partenza sarà la teoria di Emil Artin, basata sulla seguente

"DEFINIZIONE": Data una matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, di colonne $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathbb{R}^n$, si definisce DETERMINANTE di A, denotato con $|A_1, A_2, \dots, A_n|$ (oppure $\det(A_1, A_2, \dots, A_n)$, o ancora $\det A$), LA funzione $\det : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{n \text{ colonne}} \to \mathbb{R}$ verificante le tre proprietà seguenti:

1) $\det(e_1, e_2, \dots, e_n) = 1$ con $e_1 \dots e_n$ base canonica

2) $\det(A_1, \dots, A_i, \dots, A_j, \dots, A_n) =$
$= -\det(A_1, \dots, A_j, \dots, A_i, \dots A_n)$

3) $\det(A_1 + B_1, A_2, \dots, A_n) =$
$= \det(A_1, A_2, \dots, A_n) + \det(B_1, A_2, \dots, A_n)$

$\det(\lambda A_1, A_2, \dots, A_n) = \lambda \det(A_1, \dots, A_n)$

NOTA: Non è affatto detto che una simile funzione esista e sia unica: in effetti, il provarlo è la maggiore difficoltà tecnica della teoria (vedi, ad esempio, il libro di LANG).

La proprietà 2) si abbrevia dicendo che il determinante è **ALTERNANTE**: scambiare due colonne della matrice fa cambiare segno al determinante.

La proprietà 3) si abbrevia dicendo che il determinante è **MULTILINEARE**: in effetti, la 3) dice che, tenendo ferme tutte le colonne dalla seconda all'ultima, il determinante è lineare rispetto alla prima colonna. Essendo poi il determinante alternante si possono, ad esempio, scambiare la prima colonna con un'altra e ottenere la linearità del determinante anche rispetto a quella colonna. In sostanza, fissate $n-1$ colonne qualsiasi, il determinante è una funzione lineare dell'ultima rimasta.

ATTENZIONE: IL DETERMINANTE NON E' LINEARE IN A !! E' LINEARE RISPETTO AD OGNI COLONNA, SE LE ALTRE RESTANO FERME. IN GENERALE:

$$\det(A+B) \neq \det A + \det B \quad !!!$$

C'sono altre due proprietà fondamentali del determinante, che non scaturiscono immediatamente dalla definizione.

TEOREMA Siano $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Allora

1) $\det(A^T) = \det(A)$

2) $\det(AB) = \det A \cdot \det B$

$\boxed{/}$

NOTA: Non esporremo dimostrazione dei due risultati precedenti. Il secondo, sul determinante del prodotto, è detto TEOREMA DI BINET (pronuncia: binè).

Il primo risultato è fondamentale, ed implica che tutto ciò che verrà provato per le colonne vale anche per le righe (e cioè le colonne della trasposta A^T).

Ci sono numerose conseguenze rilevanti di queste poche proprietà "assiomatiche" (almeno per noi), contenute nei seguenti risultati.

TEOREMA: Se due colonne (o righe) di A sono uguali, allora $\det A = 0$.

DIM. Se, ad esempio, fossero uguali le prime due colonne si potrebbero scambiare di posto ottenendo la stessa matrice. Poiché lo scambio di colonne cambia il segno al determinante ne segue che il determinante deve coincidere col suo opposto. $\boxed{/}$

TEOREMA: Condizione necessaria e sufficiente perché $A_1 \dots A_n$ siano dipendenti è che $\det(A_1,\dots,A_n)=0$.

DIM. $\boxed{A_1 \dots A_n \text{ dipendenti} \Longrightarrow \det(A_1 \dots A_n)=0}$

Infatti, uno dei vettori A_i è combinazione degli altri. Sia A_1, per semplicità, e dunque $A_1 = \sum_2^n \alpha_i A_i$. Allora

$$\det(A_1,\dots,A_n) = \det\left(\sum_2^n \alpha_i A_i, A_2, \dots, A_n\right) \underset{\uparrow}{=} \sum_2^n \alpha_i \det(A_i, A_2, \dots, A_n)$$

linearità rispetto alla prima colonna

Poiché tutti i determinanti $\det(A_i, A_2, \dots, A_n)$ $i=2,\dots n$, hanno due colonne uguali, sono nulli.

$\boxed{\det(A_1 \dots A_n)=0 \Longrightarrow A_1 \dots A_n \text{ dipendenti}}$

Supponiamo che $\det(A_1,\dots,A_n)=0$ e che $A_1 \dots A_n$ siano indipendenti, e deduciamone un assurdo.

Se $A_1,\dots,A_n$ sono indipendenti, sono una base di $\mathbb{R}^n$ (teorema dei generatori), e dunque $\forall h=1..n$ esistono costanti $\alpha_{h i_h}$, $i_h=1..n$ tali che

$$e_h = \sum_{i_h=1}^n \alpha_{h i_h} A_{i_h} = \alpha_{h i_h} A_{i_h} \quad \text{(convenzione di Einstein)}$$

da cui

$$1 = \det(e_1,\dots,e_n) = \det\left(\alpha_{1 i_1} A_{i_1}, \alpha_{2 i_2} A_{i_2}, \dots, \alpha_{n i_n} A_{i_n}\right) \underset{\uparrow}{=}$$

linearità rispetto alle I colonne

$$= \alpha_{1 i_1} \det(A_{i_1}, \alpha_{2 i_2} A_{i_2}, \dots, \alpha_{n i_n} A_{i_n}) =$$ linearità rispetto alla II colonna

$$= \alpha_{1 i_1} \alpha_{2 i_2} \det(A_{i_1}, A_{i_2}, \alpha^3_{i_3} A_{i_3} \dots, \alpha^n_{i_n} A_{i_n}) =$$ continuando, una colonna alla volta...

$$= \alpha^1_{i_1} \alpha^2_{i_2} \cdots \alpha^n_{i_n} \det(A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_n})$$

ove nelle sommatorie sugli indici ripetuti $i_1, i_2, \dots, i_n$ (non indicate per la convenzione d'Einstein) essi assumono tutti i valori fra 1 ed n. Tutti i determinanti a secondo membro sono nulli: o due indici i_h e i_k coincidono, e dunque due colonne sono uguali, oppure sono tutti distinti, ed allora le colonne $A_{i_1} \dots A_{i_n}$ si possono permutare fino ad ottenere $A_1 \dots A_n$. Poiché $\det(A_1, \dots, A_n) = 0$, anche $\det(A_{i_1}, \dots, A_{i_n}) = (-1)^{\text{numero di scambi}} \det(A_1, \dots, A_n) = 0$.

Da $\det(A_{i_1} \dots A_{i_n}) = 0 \ \forall i_1 \dots i_n \in 1..n$ segue dunque l'assurdo

$$1 = \alpha^1_{i_1} \cdots \alpha^n_{i_n} \det(A_{i_1}, \dots, A_{i_n}) = 0$$

$\boxtimes$

COROLLARIO: Sommare ad una colonna (o riga) una combinazione lineare delle altre non altera il determinante.

DIM. $$\det(A_1 + \sum_2^n \alpha^i A_i, A_2, \dots, A_n) =$$

$$= \det(A_1, A_2, \dots, A_n) + \sum_2^n \alpha^i \underbrace{\det(A_i, A_2, \dots, A_n)}_{\text{due colonne uguali}} =$$

$$= \det(A_1, A_2, \dots, A_n)$$

TEOREMA (**Formula di CRAMER**):

Siano $A_1 \dots A_n$ indipendenti. Allora, la soluzione $(x_1 \dots x_n)$ del sistema lineare $\sum_1^n x_i A_i = B$ esiste, è unica, e verifica:

$$x_i = \frac{\det(A_1, \dots, A_{i-1}, B, A_{i+1} \dots A_n)}{\det(A_1, \dots, A_n)}$$

DIM. Poiché $A_1 \dots A_n$ sono indipendenti $\det(A_1, \dots, A_n) \neq 0$, per il teorema precedente. Inoltre, $A_1 \dots A_n$ sono una base e dunque il sistema $\sum_1^n x_i A_i = B$ ha soluzione unica, $\forall B \in \mathbb{R}^n$.

Per semplicità proviamo la tesi per $i=1$. Si ha allora, da $B = \sum_1^n x_i A_i$

$$\det(B, A_2, \dots, A_n) = \det\left(\sum_1^n x_i A_i, A_2, \dots, A_n\right) =$$

$$= \sum_1^n x_i \det(A_i, A_2, \dots, A_n) = x_1 \det(A_1, \dots, A_n)$$

perché $\det(A_i, A_2, \dots, A_n) = 0 \quad \forall i = 2 \dots n$, avendo colonne uguali.

Dividendo per $\det(A_1, \dots, A_n) \neq 0$ segue la tesi.

$\boxed{//}$

NOTE FONDAMENTALI (per il calcolo di determinanti):

1) Scambiare due righe (o colonne) cambia di segno al determinante

2) Moltiplicare una riga (o colonna) per un fattore moltiplica il determinante per lo stesso fattore

3) Sommare ad una riga (o una colonna) una combinazione delle altre non fa variare il determinante.

Sono tecniche già impiegate nell'algoritmo di Gauss ed hanno un ottimo comportamento riguardo al determinante. Occorre però calcolare i determinanti delle matrici diagonali (avendo in mente la versione di Gauss-Jordan, o quelle triangolari, volendo usare la versione originale di Gauss.

TEOREMA: Sia A diagonale, e cioè $a_{ij} = \begin{cases} \lambda_i & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$

Allora $\det A = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$.

DIM. Infatti $A = (\lambda_1 e_1, \lambda_2 e_2, \ldots, \lambda_n e_n)$, e dalla multilinearità

$$\det A \overset{\text{I colonna}}{=} \lambda_1 \det(e_1, \lambda_2 e_2, \ldots, \lambda_n e_n) \overset{\text{II colonna}}{=} \lambda_1 \lambda_2 \det(e_1, e_2, \lambda_3 e_3 \ldots \lambda_n e_n) =$$

$$= \ldots \overset{n\text{-esima colonna}}{=} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n \underbrace{\det(e_1, \ldots, e_n)}_{=1} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

▨

TEOREMA: Sia A triangolare (e cioè, $a_{ij} = 0$ se $i > j$)

Allora, $\boxed{\det A = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}}$.

DIM. Infatti, $A = \left(a_{11} e_1, a_{12} e_1 + a_{22} e_2, \ldots, \sum_1^n a_{in} e_i\right)$, da cui

$$\det A = a_{11} \det\left(e_1, a_{12} e_1 + a_{22} e_2, \ldots, \sum_1^n a_{in} e_i\right) =$$

$=$ (sottraendo alla II colonna a_{12} volte la prima)

$$a_{11} \det\left(e_1, a_{22} e_2, a_{13} e_1 + a_{23} e_2 + a_{33} e_3, \ldots \sum_1^n a_{in} e_i\right) =$$

$$= a_{11} a_{22} \det\left(e_1, e_2, \sum_1^3 a_{i3} e_i, \ldots, \sum_1^n a_{in} e_n\right) = \begin{pmatrix}\text{sottraendo alla III } a_{13} \\ \text{volte la I più } a_{23} \text{ volte la II}\end{pmatrix}$$

$$= a_{11} a_{22} a_{33} \det\left(e_1, e_2, e_3, \sum_1^4 a_{i4} e_i, \ldots, \sum_1^n a_{in} e_i\right) =$$

$= a_{11} a_{22} a_{33} \cdots a_{nn} \det(e_1, e_2, e_3, \dots e_n) = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$

$\boxtimes$

Ne segue un'efficiente strategia per il calcolo del determinante: basta ridurre la matrice a scala (tenendo traccia del solo numero di scambi DI RIGHE E DI COLONNE e **NON** degli scambi di colonne effettuati, come accade nella risoluzione dei sistemi lineari, e ricordando che per dividere una riga per un numero, questo deve essere "portato fuori" dal determinante) proseguendo fino a ridurre la matrice alla forma triangolare, per la quale il calcolo si riduce a moltiplicare gli elementi sulla diagonale.

ATTENZIONE: ci sono differenze sottili, ma sostanziali, fra le "tecniche" impiegabili per risolvere un sistema lineare e quelle che consentono di calcolare un determinante. Ad esempio, per risolvere il sistema omogeneo $\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{array}$ si può lasciare la prima riga inalterata, moltiplicare la seconda per 2 ottenendo $\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \end{array}$ e sottraendo dalla seconda 3 volte la prima ottenendo $\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{array}$, elementarmente risolubile.
Cosa accade se si volesse calcolare il determinante allo stesso modo?

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2\cdot 3 & 2\cdot 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(-10) = -5$$

Tutto a posto!
Se però si esportano distrattamente i "passaggi" della risoluzione del sistema, si potrebbe essere indotti a credere che $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ sia uguale a $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}$,

cosa falsa: il primo vale -5, come prima calcolato (corretta-mente), mentre il secondo vale -10, che è esattamente il doppio del precedente. Il calcolo "ingenuo" ignora che, passando da $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ a $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}$ il determinante raddoppia e, quindi, il valore finale va diviso per due.

E' bene ricordare che il teorema provato prima garantisce che $|A_1 + \sum_2^n \alpha_i A_i, A_2, \dots, A_n| = |A_1, \dots, A_n|$ (e altrettanto vale per le righe), mentre il passaggio da $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ a $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -5 \end{vmatrix}$ richiede la sostituzione, inoffensiva nella risoluzione d'un sistema,

$$2\text{II} - 3\text{I} \rightarrow \text{II}$$

che però, per il teorema precedente, equivale a $2\text{II} \rightarrow \text{II}$, il che fa raddoppiare il determinante!

Una strategia affidabile è quindi di usare i teoremi precedenti, che giustificano (repetita juvant) solo le operazioni seguenti:

- scambio di righe o di colonne, al costo d'un cambio di segno del risultato.
- sostituire ad una riga un suo multiplo, al costo di DIVIDERE per lo stesso fattore il risultato finale
- sommare o sottrarre ad una riga una combinazione delle altre (SIC!) (e **NON** sommare o sottrarre al doppio d'una riga il triplo d'un'altra e sostituire il risultato alla riga originale!)