# DETERMINANTI DI MATRICI DIAGONALI E TRIANGOLARI

---

Detto $S_n$ l'insieme delle permutazioni su $\{1,..,n\}$, ossia l'insieme delle funzioni biiettive su $\{1,..,n\}$ a valori in $\{1,..,n\}$, si può definire il determinante d'una matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ponendo

$$|A| \equiv \det A \equiv \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{|\sigma|} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

ove la somma è estesa a tutte le permutazioni e $|\sigma|$ è il numero delle inversioni presenti in $\sigma$, ossia il numero delle coppie $i,j$ tali che $i<j$ e $\sigma(i) > \sigma(j)$.

Ad esempio, il determinante di $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ ha tanti addendi quanti sono le permutazioni su $\{1,2\}$, che sono

$$\begin{matrix}\sigma(1)=1 \\ \sigma(2)=2\end{matrix} \text{ (nessuna inversione) oppure } \begin{matrix}\tau(1)=2 \\ \tau(2)=1\end{matrix} \begin{pmatrix} \text{un'inversione} \\ i=1 \quad j=2 \\ \sigma(i)=2 \quad \sigma(j)=1 \end{pmatrix}$$

ed è dunque uguale a

$$(-1)^{|\sigma|} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} + (-1)^{|\tau|} a_{1\tau(1)} a_{2\tau(2)} =$$

$$= (-1)^0 a_{11} a_{22} + (-1)^1 a_{12} a_{21} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

Il determinante così definito verifica le proprietà assiomatiche di E. Artin, quando si pensa ad esso come funzione delle colonne della matrice:

- È lineare in ogni colonna, fissate le altre.
- Cambia segno se si scambiano due colonne.
- vale 1 sulla base canonica.

Lo scopo delle brevi note che seguono è di svolgere, facendo uso proprio della definizione, il calcolo del determinante per le matrici diagonali, per le quali $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$, o per quelle triangolari (superiori), per le quali $a_{ij} = 0$ se $i > j$. Il calcolo diretto del determinante comporta l'esame delle $n!$ permutazioni, ed è di complessità proibitiva, in generale. Nei due casi in esame, però, la relativa abbondanza di zeri fa sì che quasi tutti i prodotti da sommare siano nulli, e ciò rende utile e opportuno l'impiego diretto della definizione.

## MATRICI DIAGONALI ($a_{ij} = 0$ se $i \neq j$)

In tal caso, ad eccezione della permutazione identica per cui $\sigma(i) = i$ $\forall i = 1..n$, almeno uno dei fattori del prodotto corrispondente verificherà $\sigma(i) \neq i$, e dunque $a_{i\sigma(i)} = 0$, il che annulla tutto il prodotto. Ne segue

$$\det A = (-1)^0 a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

e cioè:

**Il determinante di una matrice diagonale è uguale al prodotto degli elementi sulla diagonale ($i = j$), nulli o meno che siano.**

## MATRICI TRIANGOLARI ($a_{ij} = 0$ se $i > j$)

In questo caso, solo di poco più complesso, non basta che gli indici siano diversi perché l'elemento della matrice, ed ogni prodotto che lo contenga, sia nullo: occorre che l'indice di riga sia maggiore (strettamente) di quello di colonne. A tale proposito vale il

**LEMMA**. Sia $\sigma \in S_n$, non identica. Allora esiste un indice $i$ tale che $i > \sigma(i)$.

Ne segue che l'elemento $a_{i\sigma(i)}$ corrispondente, in una matrice triangolare superiore, si annulla!

**DIM**.

Sia $i^*$ il primo indice per cui $\sigma(i^*) \neq i^*$, che certamente esiste perché $\sigma$ non è identica.

| $i$ | $1$ | $2$ | $\cdots$ | $i^*-1$ | $i^*$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sigma(i)$ | $1$ | $2$ | $\cdots$ | $i^*-1$ | $\sigma(i^*) \neq i^*$ |

Ne segue subito che $i^*$ non è immagine né dei valori $1, 2, \dots, i^*-1$, che hanno per immagini se stessi, né di $i^*$, per come è stato definito, e dunque è immagine di un valore $j > i^*$. Si ha allora $i^* = \sigma(j)$ con $j > i^*$, che è la tesi. $\blacksquare$

In definitiva:

# Il determinante di una matrice triangolare è uguale al prodotto degli elementi sulla diagonale, eventualmente nulli.

Se si riduce a scala una matrice singolare, tutti gli elementi sotto la diagonale, ed anche qualcuno SULLA diagonale, sono nulli.

L'applicazione più utile del risultato precedente è costituita dalla possibilità di applicare l'algoritmo di Gauss (anche) al calcolo dei determinanti. Infatti

- Permutare righe o colonne cambia solo il segno al determinante.
- Sommare ad una riga un multiplo di un'altra lo lascia inalterato.
- Moltiplicare una (sola) riga per un numero moltiplica il determinante per quel numero.

Dunque, occorre ridurre la matrice a forma triangolare, $a_{ij}=0$ se $i>j$, tenendo il conto delle eventuali permutazioni di righe e colonne, moltiplicare gli elementi sulla diagonale, aggiungere un segno meno se il numero delle permutazioni è dispari, e... il gioco è fatto!

Esempio: il determinante di

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{III-2I \\ IV-I}]{II-I} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} \overset{II \leftrightarrow III}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

scambio di righe (segno −)

$$\xrightarrow[IV-2II]{III-2II} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{vmatrix} \xrightarrow{IV-2III}$$

portando fuori un fattore 3 dalla III riga.

$$= -3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -3\left(1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-2)\right) = 6$$

Il calcolo diretto (o attraverso la formula di Laplace) richiede il calcolo di 24 prodotti (4!): ad esempio, lo sviluppo di Laplace richiede 4 determinanti 3×3 e quindi 12 determinanti 2×2. La situazione peggiora radicalmente al crescere dell'ordine $n$: una matrice 5×5 richiede 120 prodotti,

una 6X6 720 prodotti, e una 7x7 5040 prodotti!
TROPPI! Tipico del fattoriale!

# ATTENZIONE!!!

- **LO SCAMBIO DI RIGHE** è privo di conseguenze nella soluzione dei sistemi lineari, mentre **CAMBIA SEGNO AL DETERMINANTE!**

- **DIVIDERE UNA RIGA PER UN NUMERO** non ha nessuna influenza mentre si risolve un sistema lineare, mentre **DIVIDE PER LO STESSO FATTORE IL DETERMINANTE!**

La cosa più facile da fare è "portare fuori" il multiplo scalare dalla riga. Se l'operazione viene ripetuta più volte, ogni operazione "porta fuori" un fattore.

- **LO SCAMBIO DI COLONNE** richiede qualche precauzione (rimettere in ordine i valori trovati) quando si usa l'eliminazione per risolvere i sistemi lineari, mentre

HA L'UNICO EFFETTO DI CAMBIARE SEGNO AL DETERMINANTE, se si sta adoperando l'eliminazione per calcolarne il valore: non occorre risolvere nulla!

IN DEFINITIVA: usare l'algoritmo di Gauss "ad occhi bendati", come se fosse un diritto civile e non un teorema che produce la tesi solo in presenza di ipotesi, ha conseguenze potenzialmente

LETALI!

L'algoritmo di Gauss è sì il "coltellino svizzero" per (quasi) tutti i problemi in dimensione finita (il calcolo degli autovalori essendo una delle notevoli eccezioni, PURTROPPO!) ma ... ha lame diverse per problemi diversi!

USARE LA LAMA GIUSTA!

# APPENDICE: UNA PROVA ALTERNATIVA (PIU' SEMPLICE).

La prova precedente, di natura combinatoria, può essere semplificata utilizzando lo sviluppo di Laplace, a sua volta conseguenza della struttura combinatoria della definizione di determinante.

La prova del fatto che il determinante di una matrice triangolare (o diagonale) coincide con il prodotto degli elementi sulla diagonale principale $\prod_{i=1}^{n} a_{ii}$ si può ottenere facilmente per induzione, sviluppando rispetto agli elementi della prima colonna.

Infatti, per $\boxed{n=2}$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}$ e la tesi è vera.

Supponiamo ora la proprietà vera per le matrici di ordine $\boxed{n-1}$ e proviamola per quelle di ordine $\boxed{n}$.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & ? & & \\ 0 & a_{22} & \vdots & & \\ 0 & & a_{33} & & \\ 0 & \bigcirc & & a_{44} & \\ \vdots & & & & \ddots \\ 0 & & & & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

(se la matrice è diagonale allora $? = 0$)

(Laplace sulla prima colonna)

$$= (-1)^{1+1}\, a_{11} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{22} & & & & 9 \\ 0 & a_{33} & & & \\ 0 & 0 & a_{44} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & a_{nn} \end{vmatrix}}_{n-1 \text{ colonne}} =$$

(per l'ipotesi induttiva applicata all'unico determinante non moltiplicato già per zero, di una matrice $\mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ ancora triangolare)

$$= a_{11}\,(a_{22}\cdots a_{nn})$$

che è quanto si voleva provare. In sostanza, si applica $n-1$ volte lo sviluppo di Laplace, sempre alla I colonna.

Volendo sviluppare la teoria, a partire dall'esistenza del determinante (inteso come funzione multilineare, alternante, che vale 1 sulla base canonica), l'approfondimento della struttura combinatoria è ineludibile. Se invece si tratta solo di calcolare il determinante di una matrice triangolare o diagonale, lo sviluppo di Laplace offre una scorciatoia davvero utile per provare le formule viste in precedenza!