LE APPLICAZIONI LINEARI ASTRATTE FRA SPAZI DI DIMENSIONE FINITA.

Lo scopo delle note seguenti è di presentare alcune proprietà generali delle applicazioni lineari fra spazi di dimensione finita, con particolare attenzione ai legami fra le dimensioni di dominio, nucleo e immagine. Il punto di partenza è un semplice

TEOREMA (dei generatori dell'immagine): Sia $A : X \to Y$, lineare, e sia $u_1, \dots, u_n$ una base di X. Allora

$$A(X) = \langle A(u_1), A(u_2), \dots, A(u_n) \rangle$$

DIM. Per ogni $x \in X$ esistono (uniche) le sue coordinate rispetto a $u_1 \dots u_n$ tali che $x = \sum_1^n x_i u_i$, da cui

$$A(x) = A\left(\sum_1^n x_i u_i\right) = \sum_1^n x_i A(u_i) \in \langle A(u_1), \dots, A(u_n) \rangle$$

Ne segue subito

$$A(X) = \{ A(x) : x \in X \} \subseteq \langle A(u_1), \dots, A(u_n) \rangle.$$

Inoltre $A(u_i) \in A(X)$ $\forall i = 1 \dots n$ e, essendo $A(X)$ un sottospazio di Y, è chiuso per combinazioni lineari, sicché

$$\langle A(u_1), \dots, A(u_n) \rangle \subseteq A(X)$$

Ciò, assieme a quanto provato più su, dà la tesi.

$\boxed{}$

Il semplice teorema precedente è di importanza fondamentale. Esponiamo subito alcune sue conseguenze notevoli.

COROLLARIO: Sia $A: X \to Y$ e sia $0 < \dim X < \infty$.
Allora:
$$\dim A(X) \leq \dim X$$

DIM. Le ipotesi assunte su $\dim X$ ci garantiscono che esistono basi di X, e sia $u_1, \ldots, u_n$ una di esse. Dal teorema precedente, segue subito
$$A(X) = \langle A(u_1), \ldots, A(u_n) \rangle$$
I generatori dello span a secondo membro sono n e, dunque, la dimensione di $A(X)$ è n se sono indipendenti mentre è minore se qualcuno di essi è combinazione degli altri, e può essere soppresso per il Lemma Fondamentale. $\blacksquare$

Ricordando che se $A: X \to Y$ è lineare e invertibile (biiettiva) allora l'inversa $A^{-1}: Y \to X$ è anch'essa lineare, si può utilizzare il Corollario precedente per ottenere un altro importante risultato.

TEOREMA (di invarianza della dimensione): Sia $A: X \to Y$ iniettiva. Allora:
$$\dim A(X) = \dim X$$

DIM. In effetti, sappiamo già dal corollario precedente che
$$\dim A(X) \leq \dim X$$
Dalle ipotesi, inoltre, A è iniettiva da X in $A(X)$. Essa è anche suriettiva per definizione di $A(X)$, e quindi è invertibile (in quanto biiettiva) con inversa lineare A^{-1}, definita

su $A(X)$ e aventi per immagine X.

Applicando allora il corollario precedente anche a A^{-1}, si ottiene

$$\dim \underbrace{X}_{\text{immagine di } A^{-1}} \leq \dim \underbrace{A(X)}_{\text{dominio di } A^{-1}}$$

che, assieme alla disuguaglianza precedente, dà la tesi. $\blacksquare$

In sostanza, le applicazioni lineari biettive conservano la dimensione. I teoremi precedenti, seppure di dimostrazione elementare, sono molto importanti. Un ultimo risultato in tal senso è il

TEOREMA: Sia $A : X \to Y$ lineare, e siano $y_1 \dots y_k \in Y$ indipendenti. Siano inoltre $x_1, \dots, x_k \in X$ tali che

$$A(x_i) = y_i \quad \forall i = 1..k$$

Allora, $x_1 \dots x_k$ sono indipendenti.

DIM. Se $\sum \alpha_i x_i = 0$, applicando A ad ambo i membri (dalla definizione di funzione) si ha

$$0 = A(0) = A\left(\sum_1^k \alpha_i x_i\right) = \sum_1^k \alpha_i A(x_i) = \sum_1^k \alpha_i y_i$$

e, dall'indipendenza di $y_1 \dots y_k$, segue la tesi. $\blacksquare$

NOTA: In sostanza, controimmagini di vettori indipendenti sono indipendenti.

NOTA: Il teorema precedente **NON** richiede né che $\dim X < \infty$, né che lo sia $\dim Y$.

Il prossimo risultato è il cuore di queste note.

TEOREMA (di decomposizione del dominio). Sia $A: X \to Y$, lineare, e sia $\dim X = n < \infty$.
Allora esiste X', sottospazio di X, verificante:

1) $X = \operatorname{Ker} A \oplus X'$

2) A è biiettiva da X' a $A(X)$.

DIM:

$\boxed{\dim \operatorname{Ker} A = 0}$

In tal caso, A è iniettiva da X in Y e, di conseguenza, biiettiva da X su $A(X)$, perché è suriettiva su $A(X)$ per definizione di immagine. Basta allora porre $X' = X$, essendo che $X \oplus \{0\} = X$.

$\boxed{\dim \operatorname{Ker} A = n}$

Allora, poiché $\operatorname{Ker} A$ è un sottospazio di X di uguale dimensione, ne segue $\operatorname{Ker} A = X$ e dunque $A(x) = 0 \ \forall x \in X$. Basta allora porre $X' = \{0\}$

$\boxed{0 < \dim \operatorname{Ker} A = k < n}$

In tal caso, sia $w_1 \dots w_k$ una base di $\operatorname{Ker} A$, e sia $v_{k+1} \dots v_n$ un suo completamento ad una base di X. Si pone poi

$$X' = \langle v_{k+1}, \dots, v_n \rangle$$

Per il lemma di ripartizione si ha $\overbrace{\langle w_1 \dots w_k \rangle}^{\operatorname{Ker} A} \oplus \overbrace{\langle v_{k+1}, \dots, v_n \rangle}^{X'} = X$ che è 1). Per provare la 2), proviamo che A è suriettiva e iniettiva da X' su $A(X)$.

$\boxed{A \text{ è suriettiva da } X' \text{ su } A(X)}$

Sia $y \in A(X)$ e sia x : $A(x)=y$, che esiste per definizione di $A(X)$. Siano ora x_i, $i=1..n$, le coordinate di x rispetto alla base di X $w_1 .. w_k v_{k+1} .. v_n$, sicché $x = \sum_1^k x_i w_i + \sum_{k+1}^n x_j v_j$. Ne segue

$$A(x) = A\Big(\underbrace{\sum_1^k x_i w_i}_{\in \operatorname{Ker} A}\Big) + A\Big(\sum_{k+1}^n x_j v_j\Big) = \sum_{k+1}^n x_j A(v_j)$$

da cui

$$A(x) \in \langle A(v_{k+1}), .., A(v_n) \rangle \quad (*)$$

Analogamente a quanto osservato nel teorema iniziale si ha, da un certo

$$A(X) = \{ A(x) : x \in X \} \subseteq \langle A(v_{k+1}), .., A(v_n) \rangle$$

ma inoltre $v_{k+1}, .., v_n \in X$ e, essendo $A(X)$ è un sottospazio d'Y, esso è chiuso per combinazioni lineari, e dunque

$$\langle A(v_{k+1}), .., A(v_n) \rangle \subseteq A(X)$$

e, assieme ad (*) segue

$$A(X) = \langle A(v_{k+1}), .., A(v_n) \rangle$$

Basta infine osservare che, per il teorema iniziale, lo span a secondo membro è esattamente $A(X')$, e dunque A è suriettiva da X' su tutto $A(X)$.

$\boxed{A \text{ è iniettiva da } X' \text{ in } A(X).}$

Infatti, sia $x' \in X'$ tale che $A(x')=0$. Dette x_j' le coordinate di x' rispetto a $v_{k+1}, .., v_n$ si ha $x' = \sum_{k+1}^n x_j' v_j$. Inoltre $A(x')=0$ e cioè $x' \in \operatorname{Ker} A$. Dunque, esistono x_i', $i=1..k$, tali che $x' = \sum_1^k x_i' w_i$, da cui

$$\sum_1^k x_i' w_i = x' = \sum_{k+1}^n x_j' v_j \Rightarrow \sum_1^k x_i' w_i - \sum_{k+1}^n x_j' v_j = 0$$

Poiché $w_1 .. w_k v_{k+1} .. v_n$ è una base di X, dall'indipendenza

segue che $x'_h = 0 \ \forall h = 1..n$, da cui $x' = \sum_1^k x_i w_i = 0$.
Dunque $\mathrm{Ker}\, A$ contiene solo il vettore 0 ed A è iniettiva.

$\blacksquare$

Dunque, il dominio di una funzione si può decomporre nella somma diretta del nucleo, sul quale essa si annulla, con un sottospazio sul quale essa è biiettiva ed ha la stessa immagine. Una conseguenza importante è il

TEOREMA (di Grassmann, sulle applicazioni): Sia $A: X \to Y$ e sia $\dim X < \infty$. Allora

$$\dim X = \dim \mathrm{Ker}\, A + \dim A(X)$$

Dim:

Per il teorema precedente, esiste X', su cui A è biiettiva con immagine $A(X)$, tale che $X = \mathrm{Ker}\, A \oplus X'$, da cui

$$\dim X = \dim \mathrm{Ker}\, A + \dim X'$$

per la proprietà fondamentale della somma diretta.
Per il teorema d'invarianza della dimensione, provato più su, segue $\dim X' = \dim A(X')$ e, poiché $A(X') = A(X)$, dalla uguaglianza precedente segue la tesi.

$\blacksquare$

In estrema sintesi: "Più nucleo, meno immagine"!
Concludiamo con un risultato provato da Cramer nel caso dei sistemi lineari quadrati, qui riformulato per le funzioni lineari.

TEOREMA (Cramer): Sia $A: X \to Y$ e sia $\dim X = \dim Y$. Allora

A è iniettiva se e solo se è suriettiva.

DIM: Infatti,

A iniettiva

$\Updownarrow$ proprietà del nucleo delle funzioni iniettive

$\dim \operatorname{Ker} A = 0$

$\Updownarrow$ Teorema di Grassmann

$\dim A(X) = \dim X$

$\Updownarrow$ $\dim X = \dim Y$

$\dim A(X) = \dim Y$

$\Updownarrow$ $A(X)$ è un sottospazio di Y con dimensione uguale

$A(X) = Y$

$\Updownarrow$ definizione di suriettività

$A : X \to Y$ suriettiva

$\blacksquare$

Infine, qualche nota a proposito di terminologia.

DEFINIZIONE: Se $A : X \to Y$, lineare, si definisce il RANGO di A come la dimensione della sua immagine.

Il rango, così definito, appare nel teorema di Grassmann. Va però ricordato che quasi ogni libro di Analisi Funzionale — l'Algebra Lineare in dimensione infinita — usa le parole RANGO e IMMAGINE come sinonimi: il rango di un operatore è uno spazio e non un numero. E' bene ricordarsene se ci si trova con un tale libro in mano. La solita Torre di Babele!

Alcuni termini "esoterici" dovrebbero servire ad abbreviarne l'uso.

Se $A : X \to Y$, allora A si dirà

OMOMORFISMO se è lineare

EPIMORFISMO se è lineare e suriettiva

MONOMORFISMO se è lineare e iniettiva

ISOMORFISMO se è lineare e biiettiva

Un omomorfismo da X in sé si dirà **ENDOMORFISMO**, mentre un isomorfismo da X in sé si dirà **AUTOMORFISMO**.

Esempi:

1) La funzione $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 2x - y \end{pmatrix}$ è un automorfismo da $\mathbb{R}^2$ in sé. Infatti, essa è lineare da $\mathbb{R}^2$ in sé, ed è quindi un endomorfismo. Inoltre si ha che il sistema omogeneo

$$\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ \hline 2 & -1 & 0 \\ \hline 0 & -5 & 0 \end{array}$$

ha solo la soluzione nulla $x=0$ $y=0$. Allora A è iniettiva e, per il teorema di Cramer, anche suriettiva (e dunque biiettiva).

2) La funzione $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ è un monomorfismo da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$, NON suriettivo.

Infatti $A(\mathbb{R}^2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ da cui $\dim A(\mathbb{R}^2) < 3$ e dunque $A(\mathbb{R}^2)$ non può coincidere con $\mathbb{R}^3$.

Inoltre, il sistema omogeneo

$$
\begin{array}{cc|cl}
1 & 2 & 0 & \\
2 & 2 & 0 & II - 2I \\
-1 & 0 & 0 & III + I \\
0 & -2 & 0 & \\
0 & 2 & 0 & V + IV \\
0 & 0 & 0 &
\end{array}
$$

Il sistema ha un pivot per ogni colonna e quindi A è iniettiva, sicché è un monomorfismo.

3) La funzione $A(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ è un omomorfismo da $\mathbb{R}^4$ in $\mathbb{R}^3$, ma non è né monomorfismo né epimorfismo.

Infatti, A è lineare da $\mathbb{R}^4$ in $\mathbb{R}^3$, e non può essere iniettiva perché il numero di pivot (corrispondenti a colonne indipendenti) in $\mathbb{R}^3$ non può superare 3, mentre le colonne sono 4: di certo, almeno una sarà non-pivot.

Riduciamo a scala il sistema

$$
\begin{array}{cccc l}
1 & 1 & 1 & -1 & \\
-1 & 1 & -3 & -3 & II + I \to IV \\
1 & 1 & 1 & -1 & III - I \to V \\
0 & 2 & -2 & -4 & \\
0 & 0 & 0 & 0 &
\end{array}
$$

Il sistema ha pivot solo su due righe, mentre l'ultima è di soli zeri. NON può, dunque, essere sempre risolubile per ogni secondo membro, da cui A NON è suriettiva.