ADDENDUM ALLA DISPENSA AL_2.4:

"UNICITA' DELLA PROIEZIONE ..."

Scopo di questi pochi fogli è di introdurre il concetto di complemento ortogonale, utile in molte questioni, e utilizzato sistematicamente nella dispensa AL_2.4 dandolo per scontato. In coda, si troverà qualche nota sul suo calcolo in pratica.

DEFINIZIONE: Sia X uno spazio euclideo di dimensione finita, e sia $Y \subseteq X$. Si definisce allora **COMPLEMENTO ORTOGONALE** di Y rispetto ad X (e si scrive $Y_X^\perp$ o, per brevità, $Y^\perp$) ponendo:

$$Y^\perp = \{x \in X \; : \; xy = 0 \;\; \forall y \in Y\}$$

In sostanza, $Y^\perp$ è formato dai vettori di X ortogonali a tutti gli elementi di Y. Se non necessari, l'indicazione "rispetto ad X" e il pedice X in $Y_X^\perp$ vengono omessi.

LEMMA: $Y^\perp$ è un sottospazio di X (anche se Y non lo fosse).

DIM. Siano $x_1, x_2 \in Y^\perp$. Allora, per ogni $y \in Y$, risulterà $(x_1 + x_2)y = x_1 y + x_2 y = 0$ e $(\lambda x_1)y = \lambda(x_1 y) = 0$.

Dunque $Y^\perp$ è un sottoinsieme di X, chiuso per somma e multiplo scalare. $\boxtimes$

Ulteriori proprietà si trovano nella dispensa AL_2.4, a pag. 2 e pag. 8.

Esempio: Sia Y un piano in $\mathbb{R}^3$ passante per l'origine, che è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$. Allora $Y^\perp$ è l'insieme (in realtà il sottospazio, per il lemma precedente) dei vettori con un estremo nell'origine ortogonali al piano, ed è dunque la retta perpendicolare al piano Y, passante per l'origine.

Esempio: Dati $u = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$, calcolare

$$\langle u, v \rangle^\perp$$

Osserviamo che se $x \in \mathbb{R}^3$ verifica $xu = 0$ e $xv = 0$ allora $x(\alpha u + \beta v) = \alpha x u + \beta x v = 0$, e dunque $x \perp \langle u, v \rangle$, da cui

$$\langle u, v \rangle^\perp = \{ x \in \mathbb{R}^3 \, ; \, xu = 0 \text{ e } xv = 0 \}$$

In componenti scalari, diventa

$$\langle u, v \rangle^\perp = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \, ; \, \begin{cases} u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0 \\ v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 = 0 \end{cases} \right\}$$

e dunque il complemento ortogonale cercato è formato da tutte le soluzioni del sistema omogeneo precedente, e cioè

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{array}{c|ccc|c|l} \mathrm{I} & 1 & 2 & -1 & 0 & \\ \mathrm{II} & \cancel{3} & \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{0} & \mathrm{II} - 3\mathrm{I} \to \mathrm{III} \\ \mathrm{III} & \cancel{0} & \cancel{-5} & \cancel{5} & \cancel{0} & \mathrm{III} \cdot \frac{1}{5} \to \mathrm{IV} \\ \mathrm{IV} & 0 & -1 & 1 & 0 & \end{array}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \boxed{\langle u, v \rangle^\perp = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}$$

In generale, dati $u_1 \dots u_k \in \mathbb{R}^n$, arbitrari, risulta:

$$\langle u_1, u_2, \dots u_k \rangle^{\perp} = \{ x \in \mathbb{R}^n ;\ x u_i = 0 \quad \forall i = 1 .. k \}$$

in quanto se x è ortogonale ad ogni u_i è anche, per linearità, ortogonale ad ogni loro combinazione lineare, e dunque a $\langle u_1 \dots u_k \rangle$.

Identico procedimento, con l'opportuno prodotto scalare, si applica in $\mathbb{C}^n$, o in altri spazi euclidei "pratici".

NOTA: Nel caso in cui non è chiaro quale debba essere spazio ambiente X, si deve indicarlo esplicitamente. Ad esempio, se X, Y e Z sono spazi tali che $Z \subseteq Y \subseteq X$, il simbolo $Z^{\perp}$ è ambiguo, perché potrebbe essere inteso tanto come il complemento di Z rispetto ad Y quanto come quello rispetto ad X. La notazione completa ($Z^{\perp}_{Y}$ oppure $Z^{\perp}_{X}$) dovrà allora essere usata. Un altro caso simile è il seguente:

$$\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle^{\perp}_{\mathbb{R}^3} \qquad \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle^{\perp}_{\mathbb{C}^3}$$

Il complemento in $\mathbb{C}^n$ di un sistema di vettori reali si impiega, ad esempio, nella dimostrazione del teorema spettrale per operatori <u>reali</u> simmetrici. <u>Sopprimere l'indicazione dello spazio ambiente solo se esso risulta</u> **<u>EVIDENTE</u>** dal contesto!