CAMBI DI BASE

INTRODUZIONE

Assegnare una base $e_1 \dots e_n$ in uno spazio X di dimensione finita n permette di associare ad ogni suo vettore x un'unica n-upla di scalari $x_1 \dots x_n$, le sue coordinate, tale che

$$x = \sum_1^n x_i e_i$$

Analogamente, data un'applicazione lineare fra due spazi di dimensioni finite

$$A : X \to Y,$$

scegliere una base, $e_1 \dots e_n$, in X e una, $f_1 \dots f_m$, in Y consente di definire la matrice associata ad A e alle basi, che verifica

$$A(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j f_i$$

ed ha come colonna j-esima l'm-upla delle coordinate di $A(e_j)$ rispetto alla base $f_1 \dots f_m$.

La questione che verrà risolta nelle pagine seguenti è di determinare le relazioni fra le coordinate o le matrici associate quando vengono cambiate le basi, basate su un'unica matrice definita utilizzando le coordinate degli elementi di una base rispetto all'altra.

LA MATRICE ASSOCIATA AL CAMBIO DI BASE

Sia X uno spazio vettoriale di dimensione finita, e siano $e_1 \dots e_n$ ed $e'_1 \dots e'_n$ due sue basi.

DEFINIZIONE La matrice di cambio di base (talvolta detta "di transizione" o "associata al cambio di base", o in altri modi simili) è definita come la matrice avente come colonne le coordinate di ciascuno dei vettori di $e'_1 \dots e'_n$ rispetto alla base $e_1 \dots e_n$ e cioè

$$M = (m_{ij})$$

ove

$$e'_j = \sum_{i=1}^{n} m_{ij} e_i$$

Si noti che, fissato j, m_{ij} $i=1..n$ (ossia la colonna j) rappresenta le coordinate di e'_j rispetto alla base "vecchia" $e_1 \dots e_n$.

Osserviamo che l'operazione può essere ripetuta invertendo i ruoli di e_i e e'_j, e sia (n_{hk}) la matrice del cambio di base da $e'_1 \dots e'_n$ a $e_1 \dots e_n$.

LEMMA <u>Le matrici (m_{ij}) ed (n_{hk}) definite più su sono l'una l'inversa dell'altra.</u>

In sostanza il cambio di base inverso, dalla base "nuova" $(e_1' \dots e_n')$ a quella vecchia $(e_1 \dots e_n)$ ha come matrice di transizione la matrice inversa di quella associata al cambio da $e_1 \dots e_n$ a $e_1' \dots e_n'$.

Denoteremo gli elementi della matrice inversa M^{-1} di $M = (m_{ij})$ col simbolo $(m^{-1})_{hk}$ (riga h e colonna k).

DIM. Da

$$e_j' = \sum_{i=1}^{n} m_{ij} e_i \qquad e \qquad e_k = \sum_{h=1}^{n} n_{hk} e_h'$$

ove (m_{ij}) e (n_{hk}) sono le matrici dei due cambi di base.

Sostituendo la prima nella seconda si ha

$$e_k = \sum_{h=1}^{n} n_{hk} \sum_{i=1}^{n} m_{ih} e_i =$$

(invertendo l'ordine delle somme - che sono finite - ossia usando le proprietà associative e commutative della somma di vettori)

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{h=1}^{n} m_{ih} n_{hk} \right) e_i$$

Dall'unicità delle coordinate rispetto a $e_1 \dots e_n$, da

$$e_k = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{h=1}^{n} m_{ih} n_{hk} \right) e_i$$

segue

$$\sum_{h=1}^{n} m_{ih} n_{hk} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq k \\ 1 & \text{se } i = k \end{cases}$$

che è la forma scalare di

$$MN = I$$

da cui infine

$$M = N^{-1}$$

$\blacksquare$

COME CAMBIANO LE COORDINATE DI UN VETTORE CAMBIANDO BASE.

Proviamo la seguente:

PROPOSIZIONE. Siano x_i, $i=1..n$, e x'_j, $j=1..n$, le coordinate di un fissato vettore x rispetto alle basi $e_1..e_n$ e $e'_1..e'_n$, rispettivamente; sia (m_{ij}) infine la matrice di cambio di base da $e_1...e_n$ a $e'_1..e'_n$.
Allora

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} m_{ij}\, x'_j \quad \text{e} \quad x'_h = \sum_{k=1}^{n} (m^{-1})_{hk}\, x_k$$

DIM. Da

$$\sum_{i=1}^{n} x_i e_i = x = \sum_{j=1}^{n} x'_j e'_j$$

ricordando che

$$e'_j = \sum_{h=1}^{n} m_{hj}\, e_h$$

segue

$$\sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{j=1}^{n} x'_j \sum_{h=1}^{n} m_{hj} e_h = \sum_{h=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} m_{hj}\, x'_j \right) e_h$$

Poiché $e_1...e_n$ è una base, le coordinate sono uniche e quindi

da
$$\sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{h=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} m_{hj}\, x'_j \Big) e_h$$
segue che i coefficienti corrispondenti agli stessi vettori e_i $(h=i)$ sono eguali e quindi
$$x_i = \sum_{j=1}^{n} m_{ij}\, x'_j$$

Per ogni fissato $x \in X$, tale legge di trasformazione fra le coordinate "vecchie" e quelle "nuove", in forma matriciale, è dunque
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$
da cui, moltiplicando a sinistra per M^{-1} e ricordando che $M^{-1}M = I$ segue anche
$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$
$\blacksquare$

Dunque, la conoscenza della matrice M (e della sua inversa M^{-1}) permette di prevedere come cambiano le coordinate dopo il cambio di base.

COME CAMBIA LA MATRICE ASSOCIATA AD UN' APPLICAZIONE LINEARE QUANDO CAMBIANO LE BASI.

Siano X e Y due spazi vettoriali di dimensione finita e $A: X \to Y$ un'applicazione lineare fra di essi. Siano ora $e_1 \dots e_n$ e $e'_1 \dots e'_n$ due basi di X, e $f_1 \dots f_m$ e $f'_1 \dots f'_m$ due basi di Y. Sia poi (a_{ij}) la matrice associata ad A e alle basi $e_1 \dots e_n$ e $f_1 \dots f_m$ e (a'_{hk}) la matrice associata ad A ed alle basi $e'_1 \dots e'_n$ e $f'_1 \dots f'_m$.

Si ha dunque

$$A(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j f_i = \sum_{h=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a'_{hk} x'_k f'_h$$

Si pone infine $A = (a_{ij})$, $A' = (a'_{ij})$, M sia la matrice del cambio di base da $e_1 \dots e_n$ a $e'_1 \dots e'_n$ e N quella del cambio da $f_1 \dots f_m$ a $f'_1 \dots f'_m$.

Proviamo ora la

PROPOSIZIONE *Nelle condizioni precedenti*

$$A' = N^{-1} A M$$

DIM.

Ora

$$\sum_{h=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a'_{hk} x'_k f'_h = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j f_i =$$

(ricordando le espressioni di x_j rispetto a x'_k e di f_i rispetto a f'_h)

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \sum_{p=1}^{n} m_{jp} x'_p \sum_{q=1}^{m} (n^{-1})_{qi} f'_q =$$

(riordinando le somme in modo da lasciare per ultime quelle sull'indice q)

$$= \sum_{q=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j,p=1}^{n} (n^{-1})_{qi} a_{ij} m_{jp} x'_p \right) f'_q$$

da cui, ragionando come prima e utilizzando l'unicità delle coordinate rispetto a $f'_1 \dots f'_m$, segue che i coefficienti dei vettori f'_h a primo e a secondo membro per $q=h$ sono uguali, e cioè

$$\sum_{k=} a'_{hk} x'_k = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j,p=1}^{n} (n^{-1})_{hi} a_{ij} m_{jp} x'_p$$

che è la forma scalare della identità di matrici

$$A' \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = N^{-1} A M \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \quad \forall x \in X$$

Per concludere che $A' = N^{-1} A M$, che è la tesi, basta osservare che, se si sceglie nell'ultima equazione $x = e'_1$, le sue coordinate (sempre per l'unicità) saranno $(1, 0, 0, \dots, 0)$ e dunque il primo membro sarà la prima colonna di A' e il secondo la prima colonna di $N^{-1}AM$, che dunque risulteranno uguali. Ripetendo il ragionamento per tutti i vettori della base $e'_1 \dots e'_n$ ne seguirà che tutte le colonne (e quindi l'intera matrice) risulteranno uguali.

∎

OSSERVAZIONE Se $A : X \to X$, se $e_1 \dots e_n$ e $e'_1 \dots e'_n$ sono due basi di X, M è la matrice di cambio di base e A e A' sono le matrici associate ad A e alla base $e_1 \dots e_n$ (sia "alla partenza" sia "all'arrivo") e alla base $e'_1 \dots e'_n$, rispettivamente, allora

$$A' = M^{-1} A M$$

Un'applicazione interessante della formula precedente è una dimostrazione della condizione necessaria e sufficiente per la diagonalizzabilità di un operatore.

TEOREMA Condizione necessaria e sufficiente perché un operatore $A : X \to X$ sia diagonalizzabile, è che esiste una base di X costituita da autovettori di A.

(C.N. Se A è diagonalizzabile allora esiste una base di X costituita da autovettori di A)

<u>DIM</u>.

Se A è diagonalizzabile esisterà un cambio di base, di matrice M, tale che $M^{-1}AM$ è diagonale, e da ciò segue che applicandola alla base canonica $e_1 \dots e_n$, risulta

$$(M^{-1}AM)\, e_i = \lambda_i e_i$$

Moltiplicando a sinistra per M, ne segue

$$AMe_i = M(\lambda_i e_i) = \lambda_i Me_i$$

Poiché Me_i è l'i-esima colonna di $M = (M_1 M_2 \dots M_n)$, dalla precedente relazione segue

$$AM_i = \lambda_i M_i$$

e dunque le colonne M_i verificano il sistema degli autovettori. Sono poi indipendenti (e di conseguenza non nulle) perché la matrice M è invertibile, e sono una base perché sono n e sono indipendenti (teorema dei generatori).

$\boxed{///}$

(C.S. Se X ha una base di autovettori di A, allora esso è diagonalizzabile)

DIM.

Sia $u_1 \cdots u_n$ una base di X tale che $A(u_i) = \lambda_i u_i$.
Sia $M = (u_1 \cdots u_n)$ la matrice le cui colonne sono gli autovettori della base.
Tale matrice è invertibile per il teorema di Cramer, perché le colonne sono n vettori indipendenti, e dunque l'applicazione associata è iniettiva, ed è suriettiva perché le colonne sono una base. Si ha allora

$$(M^{-1}AM)e_i = M^{-1}Au_i = M^{-1}\lambda_i u_i = \lambda_i M^{-1}u_i$$

e poiché

$$(e_1 \cdots e_n) = I = M^{-1}M = M^{-1}(u_1 \cdots u_n)$$

ne segue

$$M^{-1}u_i = e_i$$

ed infine

$$(M^{-1}AM)e_i = \lambda_i e_i$$

e dunque la matrice associata ad A, <u>dopo</u> il cambio di base, e cioè $M^{-1}AM$, è diagonale.

Un'altra applicazione importante è l'invarianza del polinomio caratteristico per cambio di base, reperibile nella dispensa sulla diagonalizzazione.

QUALCHE ESEMPIO

1)

Sia $X = \mathbb{R}^2$ e si considerino le due basi

$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad e \quad \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}.$$

Per calcolare la matrice di cambio di base occorre esprimere $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ come combinazione di $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ e porre in colonna le coordinate di ciascuno dei vettori della base "nuova" cioè risolvere

$$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \gamma\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

da cui

$$\begin{cases} 2 = \alpha + \beta \\ 1 = 2\alpha + \beta \end{cases} \quad \text{da cui} \quad -\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = -1 \Rightarrow \beta = 3$$

e

$$\begin{cases} 2 = \gamma + \delta \\ 3 = 2\gamma + \delta \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \gamma = 1 \Rightarrow \delta = 1$$

Ora le coordinate α, β del primo vettore $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ della nuova vettore rispetto alla base vecchia costituiranno la prima colonna mentre γ, δ formeranno la seconda colonna, e infine la matrice di cambio di base sarà

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Sia $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. La sua matrice di rappresentazione rispetto alla base canonica è

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Se si cambia la base da quella canonica all'altra $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, come cambia la matrice di rappresentazione di A rispetto alla base $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sia nel dominio sia nell'immagine?

Il problema può essere risolto usando la definizione di matrice di rappresentazione (o associata), e cioè calcolando $A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e ponendo nella prima colonna della matrice le coordinate di $A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ rispetto a $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, ossia le soluzioni di

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e ripetendo il calcolo per $A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ per determinare la seconda colonna.

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 5 = \alpha + 2\beta \\ 5 = 2\alpha + \beta \end{cases} \Rightarrow 5 = 3\beta \Rightarrow \beta = \frac{5}{3} \quad \alpha = 5 - \frac{10}{3} = \frac{5}{3}$$

$$A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix}=\gamma\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\delta\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}7=\gamma+2\delta\\4=2\gamma+\delta\end{cases}\qquad 10=3\delta \Rightarrow \delta=\frac{10}{3}\Rightarrow \gamma=\frac{1}{3}$$

da cui la matrice associata ad A e alla base $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ (per dominio e codominio) è

$$\begin{pmatrix}\frac{5}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{5}{3}&\frac{10}{3}\end{pmatrix}$$

Una via alternativa è di usare la formula

$$A'=M^{-1}AM$$

ove M è la matrice associata al cambio di base da $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

Le coordinate di $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ rispetto a $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ sono ovviamente $1, 2$ mentre quelle di $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ sono $2, 1$, sicché la matrice è

$$M=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$$

Per calcolare l'inversa, viste le piccole dimensioni, si può adoperare la formula dei complementi algebrici (altrimenti si può adoperare l'algoritmo di Gauss-Jordan) ottenendo

$$\begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix}=1-4=-3 \Rightarrow M^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

da cui la matrice associata ad A e alla nuova base è

$$M^{-1}AM = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 1 \\ \frac{5}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & \frac{10}{3} \end{pmatrix}$$

Entrambi i metodi, al crescere delle dimensioni della matrice, comportano una mole notevole di calcoli.
L'algoritmo di Gauss può offrire qualche aiuto, sia nel calcolo della matrice inversa M^{-1}, sia nella risoluzione dei sistemi lineari richieste dalla definizione: infatti la matrice dei coefficienti è la stessa e quindi i sistemi possono essere risolti simultaneamente. Nel nostro caso il sistema multiplo da risolvere è

$$\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 5 & 4 \end{array}$$

Per sistemi di dimensioni maggiori il vantaggio è significativo.