IL CALCOLO DIFFERENZIALE (VI)

Un altro interessante aspetto "geometrico" dei concetti di differenziale ed gradiente riguarda la possibilità di determinare la direzione (nel dominio) nella quale spostarsi per trovare la massima pendenza.

Ricordiamo che, se f è differenziabile in x_0, allora ha ivi tutte le derivate direzionali e che, inoltre

$$f_v(x_0) = df(x_0, v) = \nabla f(x_0) v$$

Dalla disuguaglianza di Schwartz, segue dunque che

$$|f_v(x_0)| \leq |\nabla f(x_0)| |v|$$

e che se v è multiplo di $\nabla f(x_0)$ vale in realtà

$$|f_v(x_0)| = |\nabla f(x_0)| |v|$$

Ne segue subito che

$$-|\nabla f(x_0)| |v| \leq f_v(x_0) \leq |\nabla f(x_0)| |v|$$

e dunque, fra tutte le direzioni v di assegnata norma non nulla (per esempio $|v| = 1$) $f_v(x_0)$ è massima se $v = \alpha \nabla f(x_0)$ $\alpha > 0$, ed è minima se $v = -\alpha \nabla f(x_0)$ $\alpha > 0$. Dunque, il gradiente indica la direzione nella quale spostarsi, nel dominio, per far crescere più rapidamente la funzione, mentre il suo opposto $-\nabla f(x_0)$ indica la direzione di massima decrescenza.

Vedremo tra breve che la direzione di $\nabla f(x_0)$ è <u>ortogonale</u> alla curva di livello $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = f(x_0)\}$, ma la prova richiede il prossimo risultato, molto importante.

<u>LA DERIVAZIONE DI FUNZIONI COMPOSTE</u>

Il risultato al cuore del problema è il seguente:

<u>TEOREMA</u> (<u>differenziale di funzioni composte</u>):
<u>Sia</u> $f : \Omega \to \Sigma$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ <u>e</u> $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^n$, <u>e</u> $g : \Sigma \to H$, $H \subseteq \mathbb{R}^p$. <u>Sia poi</u> $h(x) = g(f(x))$ <u>e sia</u> x_0 <u>interno</u> <u>ad</u> $\Omega = \mathrm{dom}(h)$. <u>Allora</u>

$$dh(x_0, w) = dg(f(x_0), df(x_0, w))$$

<u>Inoltre</u>, <u>rappresentando i differenziali con</u> <u>derivate-velocità-gradienti-jacobiane</u> <u>si ha anche</u>

$$h'(x_0)w = g'(f(x_0))\, f'(x_0)\, w \qquad \forall w \in \mathbb{R}^n$$

ed infine

$$h'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0)$$

DIM. (vedi Appendice)

Si osservi che è la solita regola di derivazione delle funzioni composte delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, ove però i termini possono essere scalari, vettori o matrici ed il prodotto va inteso nel senso opportuno.

Esempio: Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

Allora, posto $h(t) = f(\gamma(t))$ si ha

prodotto scalare

$$h'(t) = f'(\gamma(t))\,\gamma'(t) \equiv \nabla f(\gamma(t))\,\dot{\gamma}(t)$$

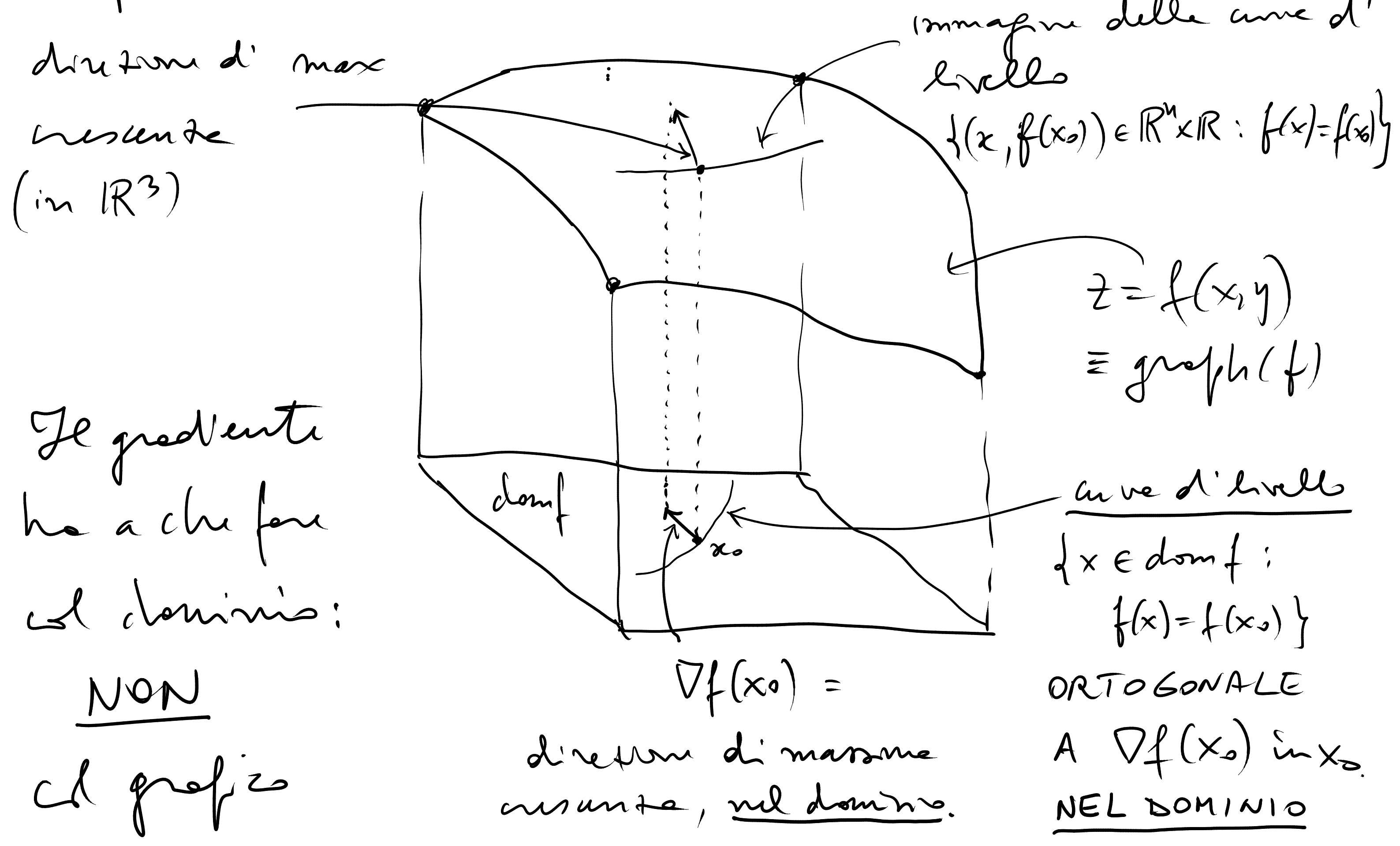
Questa formula è al cuore della teoria dei campi, e le sue applicazioni più importanti sono da ricercarsi lì.

Per ora, proviamo che ogni curva di livello di una funzione differenziabile è ortogonale al gradiente in quel punto.

Se $\gamma(t)$, $t \in [a,b]$, è una curva parametrizzata tutta giacente sull'insieme di livello k, $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = k\}$, si ha $f(\gamma(t)) = k \quad \forall t \in [a,b]$. Allora $h(t) = f(\gamma(t))$ è costante in $[a,b]$ e dunque $0 \equiv h'(t) = \nabla f(\gamma(t))\,\dot{\gamma}(t)$.

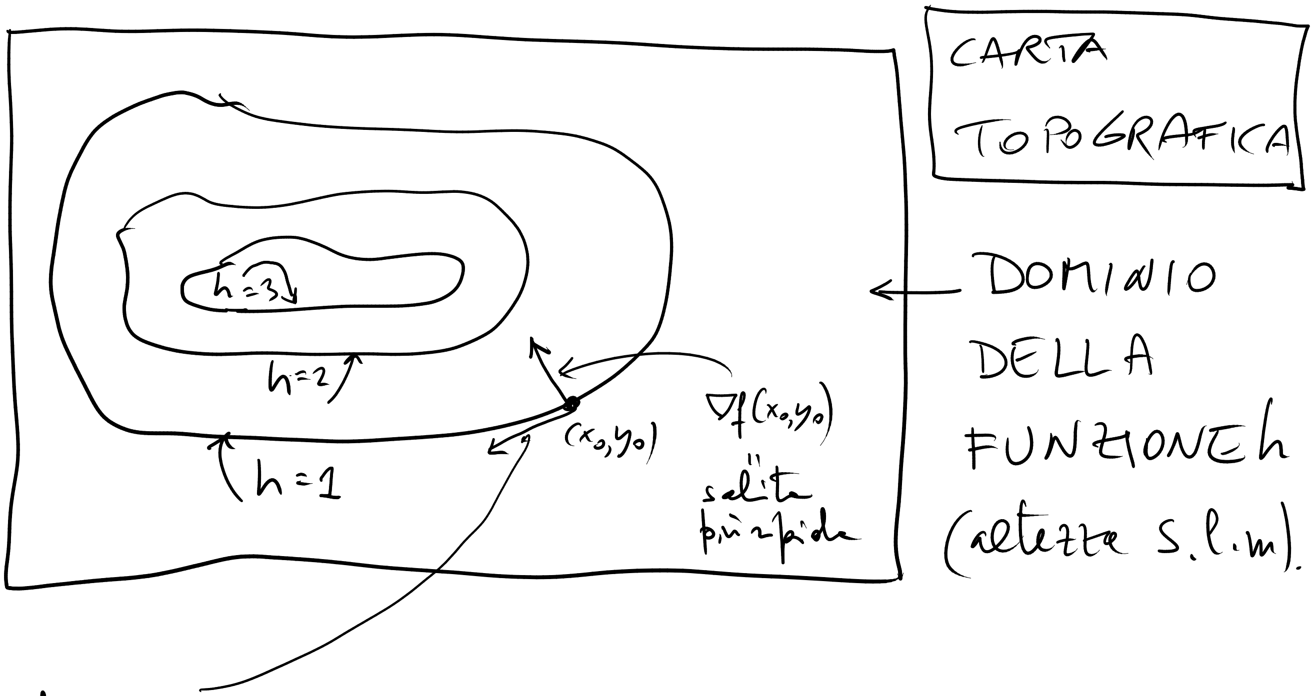
Ne segue che, nel punto $\gamma(t)$, immagine di qualsiasi $t \in [a,b]$, il vettore $\nabla f(\gamma(t))$ (il gradiente di f in quel punto) ha prodotto scalare nullo con $\dot{\gamma}(t)$ (la direzione della curva, o del moto, in quel punto).

Dunque: il gradiente di una funzione (scalare) indica la proiezione sul piano orizzontale della direzione nella quale muoversi per trovare la massima pendenza (in inglese, GRADIENT vuol dire PENDENZA, dal verbo latino gradior) ma indica anche la direzione normale alla curva di livello in quel punto.



Il gradiente ha a che fare col dominio: NON col grafico

CURVE DI LIVELLO



direzione della curva di livello: **ORTOGONALE AL GRADIENTE NEL PUNTO**

Un'osservazione meteorologica: le curve di livello della pressione atmosferica (isobare) danno importanti indicazioni sulla velocità del vento: più sono fitte, più rapidamente varia la pressione, il che sottopone le masse d'aria comprese ad una maggiore differenza di spinta che le accelera. Il fatto che poi devii in senso antiorario (qui; orario in Argentina, o in Sud-Africa, o in Australia), dipende dalla rotazione della terra ma questa ... è un'altra storia!

Un'osservazione: il teorema di derivazione di funzioni composte in più variabili non riveste, nella pratica, l'importanza vitale che appare chiaramente in una variabile.

In effetti, mentre ci sono numerosi esempi di funzioni in una variabile c'è un numero estremamente ridotto di funzioni "native" di più variabili (in realtà: due): somma, differenza, moltiplicazione, divisione, potenza, per le quali esistono "regole di derivazione". Ad esempio, la funzione composta da $t \to (\cos t, \sin t)$ e dalla funzione di due variabili $(x,y) \to x^y$ è "semplicemente"

$$t \to (\cos t)^{\sin t} \equiv e^{\sin t \lg \cos t}$$

per derivare la quale non è necessario scomodare la rappresentazione del differenziale di $(x,y) \to x^y$: è una funzione di una sola variabile, e come tale si può derivare!

L'importanza della formula $\left(f(\gamma(t))\right)' = Df(\gamma(t))\,\gamma'(t)$ è fondamentale in teoria (ad esempio, permette di definire la differenza di potenziale!) ma è del tutto invisibile in pratica, se si manipolano solo funzioni elementari.