IL CALCOLO DIFFERENZIALE (V)

Rette e piani tangenti.

In questa sezione verranno trattati alcuni aspetti geometrici dei concetti appena introdotti sulla scia di quanto detto proprio all'inizio, riguardanti rette, piani o spazi tangenti. L'idea centrale, comune a tutti i casi, è che la funzione

$$g(x) = f(x_0) + A(x-x_0) \qquad A(w) = df(x_0, w)$$

ha per grafico, a seconda del dominio e del codominio di f, ora una retta cartesiana o parametrica, ora un piano (o iper-piano) cartesiano o parametrico, quello che "meglio approssima" il grafico o l'immagine di f.

Il caso $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è già noto, ed è esposto nell'intro durante la definizione di differenziale. Consideriamo $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, ed osserviamo che $g(t) = \gamma(t_0) + \dot{\gamma}(t_0)(t-t_0)$ è una retta parametrica passante per $\gamma(t_0)$ e con gli spostamenti su di essa tutti paralleli a $\dot{\gamma}(t_0)$. La differenziabilità di f assicura (posto $w = t-t_0$) che $\lim_{w \to 0} \frac{|\gamma(t) - g(t)|}{|w|} = 0$ e dunque che $g(x)$ è la funzione del tipo $\gamma(t_0) + aw$ che meglio "approssima" la traiettoria $\gamma(t)$. Ha dunque senso dire

"**DATI** $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ e $t_0 \in [a,b]$

si definisce **RETTA TANGENTE** al sostegno (ossia all'immagine) di γ nel suo punto $\gamma(t_0)$ la retta parametrica

$$\sigma(t) = \gamma(t_0) + (t - t_0)\dot\gamma(t_0)$$

Il vettore $\dot\gamma(t_0)$ (oltre che derivata) si dice anche VELOCITA' di γ in $\gamma(t_0)$. //

$\boxed{\text{Se } \dot\gamma(t_0) = 0, \text{ la retta tangente NON viene così definita.}}$

Il caso $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è diverso. Esaminiamo in dettaglio il caso $n = 2$. In tal caso, ricordando che $\operatorname{graph} f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y)\}$ ne segue che, posto come prima $w = (x - x_0, y - y_0)$,

$$g(x, y) = f(x_0, y_0) + \underbrace{f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)}_{df((x_0, y_0); w)}$$

ha per grafico il piano (esplicito)

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

e, ancora una volta, g è la funzione affine ("lineare più una costante") che meglio approssima f vicino a (x_0, y_0).

Dunque:

Il PIANO TANGENTE al grafico cartesiano $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z=f(x,y)\}$ della funzione f, differenziabile in (x_0,y_0), nel suo punto $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ è il piano di equazione implicita

$$z-f(x_0,y_0)-f_x(x_0,y_0)(x-x_0)-f_y(x_0,y_0)(y-y_0)=0$$

La direzione normale a tale piano è dunque quella del vettore

$$v=(-f_x(x_0,y_0)\,,\,-f_y(x_0,y_0)\,,\,1)$$

Si osservi che v punta in direzione delle z crescenti.

La generalizzazione ad $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ è immediata.

Il PIANO TANGENTE AL GRAFICO DI $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ nel punto $(x_0\,,\,f(x_0))\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$ è

$$z-f(x_0)-Df(x_0)(x-x_0)=0 \qquad z\in\mathbb{R},\ x\in\mathbb{R}^n$$

e la relativa direzione normale è

$$v=(-Df(x_0)\,,\,1)\equiv(-f_{x_1}(x_0),\dots,-f_{x_n}(x_0),1)$$

ATTENZIONE: il gradiente non indica la direzione normale al grafico di una funzione differenziabile, ma solo la sua proiezione sullo spazio del dominio. È un elementare conto da buona massaia; il vettore normale ad un piano in $\mathbb{R}^3$ (tangente al grafico di $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$) ha tre componenti, mentre $\nabla f = (f_x, f_y)$ solo due! È chiaro che non possono essere la stessa cosa! Ci manca, però, davvero poco:

$$\nu = \left(-f_x, -f_y, 1\right) \quad \text{oppure} \quad -\nu = \left(f_x, f_y, -1\right)$$

forniscono i due orientamenti possibili per la direzione normale, delle z crescenti o delle z decrescenti!

L'ultimo caso è quello generale $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Tratteremo prima il caso $n=2$ ed $m=3$, che corrisponde alle cosiddette "superficie parametriche". Due importanti esempi sono:

– il piano parametrizzato in $\mathbb{R}^3$:

$$\Psi(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \qquad \Psi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

– la sfera unitaria, in coordinate polari sferiche,

$$\phi(\theta,\varphi)=\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi\\ \cos\theta\end{pmatrix}$$

$\theta\in\,]0,\pi[$ colatitudine

$\varphi\in\,]0,2\pi[$ longitudine

Sia dunque $\phi(u,v)=\begin{pmatrix}\phi_1(u,v)\\ \phi_2(u,v)\\ \phi_3(u,v)\end{pmatrix}$, differenziabile.

La "funzione affine tangente" in (u_0,v_0) è

$$\psi(u,v)=\underbrace{\phi(u_0,v_0)}_{\substack{\text{punto di}\\ \text{tangente}}}+\underbrace{\underbrace{\phi'(u_0,v_0)}_{\text{jacobiana}}\underbrace{\begin{pmatrix}u-u_0\\ v-v_0\end{pmatrix}}_{w}}_{\text{differenziale in }(u_0,v_0)}$$

Ricordando che, se $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ e A_i sono le colonne di A, per ogni $w\in\mathbb{R}^n$ si ha allora $Aw=\sum_1^n w_iA_i$ ne segue che la funzione precedente si può scrivere anche

$$\psi(u,v)=\phi(u_0,v_0)+\phi_u(u_0,v_0)(u-u_0)+\phi_v(u_0,v_0)(v-v_0)$$

ove ϕ_u e ϕ_v sono le due colonne della matrice jacobiana

$$\phi_u=\begin{pmatrix}(\phi_1)_u\\ (\phi_2)_u\\ (\phi_3)_u\end{pmatrix},\qquad \phi_v=\begin{pmatrix}(\phi_1)_v\\ (\phi_2)_v\\ (\phi_3)_v\end{pmatrix}.$$

L'equazione così ottenuta mostra che, se $\phi_u(u_0,v_0)$ e $\phi_v(u_0,v_0)$ sono indipendenti, e cioè se $\phi_u \wedge \phi_v(u_0,v_0) \neq 0$, allora essi generano gli spostamenti sul piano tangente. Osserviamo anche che $\phi_u(u_0,v_0)$ è il vettore velocità della curva $u \to \phi(u,v_0)$, che giace tutta sulla superficie, e $\phi_v(u_0,v_0)$ è la velocità di $v \to \phi(u_0,v)$, anch'essa con sostegno interamente contenuto in quello della superficie ϕ. Dunque gli spostamenti sul piano (affine) tangente all'immagine di ϕ sono generati dai vettori tangenti alle due curve precedenti, se risultano indipendenti. Le condizioni $\dot\gamma(t_0) \neq 0$, per le curve, e $\phi_u \wedge \phi_v(u_0,v_0) \neq 0$ per le superficie, sono il requisito più importante per definirle "REGOLARI", indipendentemente dalla regolarità, e cioè dalla continuità delle derivate, delle loro componenti scalari.

Non resta che di completare la definizione di piano tangente nel caso generale $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, sulla falsa riga di quanto già fatto per le superficie parametriche.

Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Fissato $x_0 \in \Omega$ si definisce SPAZIO TANGENTE ad f in x_0 lo spazio T generato dalle colonne T_i di $f'(x_0)$ (la sua matrice jacobiana in x_0).

L'espressione parametrica dello SPAZIO AFFINE TANGENTE sarà invece

$$g(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = f(x_0) + \sum_1^n \alpha_i T_i$$

Non è detto, a priori, che T abbia dimensione n, perché le n colonne di $f'(x_0)$ potrebbero non essere indipendenti. E' bene notare che, mentre lo spazio tangente è lo spazio vettoriale degli spostamenti da $f(x_0)$ tangenti al sostegno di f, lo spazio affine è più simile a ciò che, nel caso delle $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^n$, abbiamo chiamato retta tangente

$$\gamma(t_0) + (t - t_0)\dot{\gamma}(t_0)$$

In tal caso, $< \dot{\gamma}(t_0) > = \{ \alpha \dot{\gamma}(t_0) ; \alpha \in \mathbb{R} \}$ è lo spazio tangente, mentre $\gamma(t_0) + < \dot{\gamma}(t_0) >$ è lo spazio affine tangente.

Studiamo un po' più a fondo il caso della sfera unitaria. Osserviamo subito che

$$(\sin\theta \cos\varphi)^2 + (\sin\theta \sin\varphi)^2 + (\cos\theta)^2 = \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

e dunque il sostegno di

$$\phi(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(\theta,\varphi) \\ y(\theta,\varphi) \\ z(\theta,\varphi) \end{pmatrix}$$

è tutto contenuto nella sfera unitaria $x^2+y^2+z^2=1$.

Sappiamo dalla geometria classica che il piano tangente ad una sfera in un punto è perpendicolare al raggio per quel punto. Determiniamo

$$\phi'(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} x_\theta & x_\varphi \\ y_\theta & y_\varphi \\ z_\theta & z_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -\sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi \\ -\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

La direzione normale allo spazio generato dalle colonne ϕ_θ e ϕ_φ è $\phi_\theta \wedge \phi_\varphi$. Si ha

$$\phi_\theta \wedge \phi_\varphi = \left(\sin^2\theta\cos\varphi,\ \sin^2\theta\sin\varphi,\ \sin\theta\cos\theta\right) =$$

$$= \sin\theta\left(\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta\right)$$

che è un vettore che ha la stessa direzione (è un multiplo) di $(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$, che è la direzione del raggio dall'origine al punto di tangenza sulla sfera.

Nessuna sorpresa, dunque!

Concludiamo con un esempio.

Sia $\phi(u,v) = (u^3, v^3, u^2v^2)$, $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$\phi'(u,v) = \begin{pmatrix} \phi_u & \phi_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3u^2 & 0 \\ 0 & 3v^2 \\ 2uv^2 & 2u^2v \end{pmatrix}$$

Osserviamo che $\phi'(0,0)$ ha rango 0 perché vale $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e dunque l'equazione del "piano" tangente in $\phi(0,0)$ sarebbe

$$\psi(\alpha,\beta) = \phi(0,0) + \alpha\,\phi_u(0,0) + \beta\,\phi_v(0,0) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

È abbastanza evidente che $\psi(\alpha,\beta) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, una superficie parametrica costante, NON definisce un piano in $\mathbb{R}^3$ (ma, forse, un punto in $\mathbb{R}^3$: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$).

Così come la condizione $\dot\gamma(t_0) \neq 0$ garantisce che

$$\sigma(t) = \gamma(t_0) + (t - t_0)\,\dot\gamma(t_0)$$

sia effettivamente una retta, e la condizione $\phi_u \wedge \phi_v(u_0,v_0) \neq 0$ garantisce che $\phi_u(u_0,v_0)$ e $\phi_v(u_0,v_0)$ siano indipendenti e quindi che

$$\psi(\alpha,\beta) = \phi(u_0,v_0) + \alpha\,\phi_u(u_0,v_0) + \beta\,\phi_v(u_0,v_0)$$

sia effettivamente un piano parametrico in $\mathbb{R}^3$, si deve immaginare un'ipotesi di "REGOLARITA' GEOMETRICA" per le funzioni da $\mathbb{R}^n$ ad $\mathbb{R}^m$. Se $m \geq n$, un'ipotesi che assicuri l'indipendenza delle colonne della jacobiana $f'(x_0)$ è di richiedere che il rango di $f'(x_0) = n$. Ne segue che

$$g(w) = f(x_0) + f'(x_0)w$$

sia un piano affine tangente con uno spazio di spostamenti di dimensione (massima) n. Il problema non si pone se $m < n$, come si vede bene nel caso scalare $n > m = 1$, dove $z = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, nel caso singolare $f'(x_0) = 0$, che corrisponderebbe al caso in cui il rango di $f'(x_0)$ è nullo, diventa $z - f(x_0) = 0$, e fornisce comunque l'equazione di un piano tangente ma in forma implicita (o esplicita: $z = f(x_0)$) e NON parametrica.

Come si intravede da queste poche osservazioni, i tre punti di vista implicito ($\equiv$ studiare i luoghi di zeri), esplicito ($\equiv$ studiare i grafici di funzioni) e parametrico ($\equiv$ studiare le immagini di funzioni) sono e restano molto diversi fra loro, pur essendo legati e, tutti e tre, indispensabili in alcuni contesti.